

## ¿Cómo promover el razonamiento científico en la enseñanza del experimento de la doble rendija con electrones?

*Como promover o raciocínio científico no ensino do experimento da dupla fenda com elétrons?*

*How to promote the scientific reasoning in teaching the double slit experiment with electrons?*

Néstor Fernando Méndez Hincapié ([nmendez@pedagogica.edu.com](mailto:nmendez@pedagogica.edu.com))

Universidad Pedagógica Nacional, Colômbia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0307-5652>

Isabel Garzón Barragán ([igarzon@pedagogica.edu.co](mailto:igarzon@pedagogica.edu.co), Universidad Pedagógica Nacional, Colômbia) ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-53486153>

### Resumen:

La dualidad onda-partícula es uno de los principales temas estudiados en la física cuántica; dadas las diferentes dificultades de aprendizaje reportadas en varias investigaciones sobre este tópico, en este artículo se analiza el experimento de la doble rendija con electrones desde el enfoque del razonamiento científico propuesto por Ian Hacking; el cual plantea seis estilos de pensar y hacer científicos creados durante el desarrollo del conocimiento científico en la tradición europea, originada desde la antigua Grecia; los cuales permiten mostrar que hay distintos modos de razonar en ciencias ayudando así a mostrar la complejidad del razonamiento científico y una consideración menos parcial de los logros culturales de la física. Para ello, se realizó un análisis de contenido de cinco artículos de investigación que reportan este experimento y dos libros de textos de física. Se encuentra que, para una explicación adecuada del fenómeno abordado en este experimento, se requiere de cuatro estilos de pensar y hacer científicos: los estilos matemático, experimental, modelamiento hipotético, y el estadístico y probabilístico. Una implicación en la enseñanza de la física cuántica es que no es posible centrarse en uno solo de estos estilos para comprender apropiadamente los conceptos y principios que subyacen a esta teoría

**Palabras-clave:** Razonamiento Científico; Estilos de pensar y Hacer Científicos; Enseñanza de la Física Cuántica; Experimento de la doble Rendija con Electrones.

### Resumo:

A dualidade onda-partícula é um dos principais tópicos estudados em física quântica; Dadas as diferentes dificuldades de aprendizagem relatadas em diversas investigações sobre o tema, este artigo analisa o experimento de dupla fenda com elétrons a partir da abordagem do raciocínio científico proposta por Ian Hacking; que levanta seis estilos de

pensar e fazer cientistas criados durante o desenvolvimento do conhecimento científico na tradição europeia, originários da Grécia antiga; que nos permitem mostrar que existem diferentes formas de raciocínio na ciência, ajudando assim a mostrar a complexidade do raciocínio científico e uma consideração menos parcial das conquistas culturais da física. Para isso, foi realizada uma análise de conteúdo de cinco artigos de pesquisa que relatam esse experimento e dois livros didáticos de física. Verifica-se que, para uma explicação adequada do fenômeno abordado neste experimento, são necessários quatro estilos de pensar e fazer ciência: matemático, experimental, de modelagem hipotética e estatístico e probabilístico. Uma implicação no ensino de física quântica é que não é possível focar em apenas um desses estilos para entender adequadamente os conceitos e princípios que fundamentam essa teoria.

**Palavras-chave:** Raciocínio Científico; Estilos de pensar e fazer Cientistas; Ensino de Física Quântica; Experiência do duplo desempenho com Elétrons.

**Abstract:**

Wave-particle duality is one of the main topics studied in quantum physics; Given the different learning difficulties reported in various investigations on this topic, this article analyzes the double slit experiment with electrons from the scientific reasoning approach proposed by Ian Hacking; which raises six styles of thinking and doing scientists created during the development of scientific knowledge in the European tradition, originating from ancient Greece; which allow us to show that there are different ways of reasoning in science, thus helping to show the complexity of scientific reasoning and a less partial consideration of the cultural achievements of physics. To do this, a content analysis of five research articles reporting this experiment and two physics textbooks was performed. It is found that, for an adequate explanation of the phenomenon addressed in this experiment, four styles of thinking and doing science are required: mathematical, experimental, hypothetical modeling, and statistical and probabilistic styles. An implication in teaching quantum physics is that it is not possible to focus on just one of these styles to properly understand the concepts and principles that underlie this theory.

**Keywords:** Scientific Reasoning; Styles of Thinking and doing Scientists; Teaching of Quantum Physics; Experiment of the Double slit with Electrons.

## INTRODUÇÃO

Las investigaciones en la enseñanza de la física cuántica, a nivel introductorio, han señalado múltiples dificultades de aprendizaje que tienen los estudiantes, cuando se enfrentan por primera vez a cursos que abordan esta teoría física (MARSHMAN; SINGH, 2015; GOMES; ALVES; STRIEDER, 2022; VARELLA, 2022). Una de las posibles causas señaladas por estas y otras investigaciones se debe a la preeminencia del

pensamiento determinista en los estudiantes, propio de la física clásica, el cual es limitado para abordar el estudio de los fenómenos cuánticos y sus explicaciones; porque los conceptos creados allí, así como las leyes establecidas a partir de la evidencia experimental, implican razonamientos probabilísticos y la redefinición de nociones como las de partícula, posición o cantidad de movimiento, entre otros (AYENE; KRIEK; DAMTIE, 2011; MANNILA; KOPONEN; NISKANEN, 2002; OLSEN, 2002; SINGH; MARSHMAN, 2015).

En relación a la redefinición de la noción de partícula en la física cuántica, uno de sus rasgos característicos es la dualidad onda-partícula; la cual, en un experimento de difracción, como el experimento de la doble rendija con electrones, permite interpretar el patrón de interferencia que se obtiene cuando los electrones impactan una pantalla después de haber cruzado la doble rendija, como una propiedad característica de las ondas, aunque estos electrones están bien localizados cuando se detectan en la pantalla. Desde la mirada de la física clásica no hay una explicación satisfactoria para el patrón de interferencia que generan los electrones, y no es posible hacer una predicción determinista de la posición de cada uno de los electrones sobre la pantalla.

Este carácter dual de onda-partícula de las partículas cuánticas, es uno de los principales temas estudiados en la enseñanza de la física cuántica (KRIJTENBURG-LEWERISSA et al, 2017 y 2018; STADERMAN; VAN DEN BERG; GOEDHART, 2019); el cual se puede abordar desde la interpretación de Copenhague, que es la más empleada en la enseñanza de esta teoría (SAYER; MARIES; SINGH, 2020), o desde la interpretación estadística. Desde la primera interpretación, los electrones son entidades que al interactuar con la doble rendija se comportan como ondas y generan el patrón de interferencia observado (PESSOA, 2006). Mientras que, desde la segunda interpretación, la estadística, los electrones son partículas individuales lanzadas en condiciones iniciales idénticas y, después de cruzar la doble rendija, impactan la pantalla de detección formando una distribución que se estabiliza al aumentar el número de electrones enviados (BALLENTINE, 1998). El patrón de interferencia generado no hace referencia a un comportamiento ondulatorio de un electrón individual, sino al de un conjunto de

electrones que han atravesado la doble rendija; es decir, la distribución del impacto de los electrones en la pantalla de detección es análoga al patrón de interferencia de una onda (PESSOA, 2006).

Para atender las dificultades de aprendizaje en la física cuántica, como las mencionadas aquí, consideramos que es de gran ayuda la concepción del razonamiento científico basada en el enfoque de los estilos de razonamiento científico de Ian Hacking (1992, 2009, 2012 y 2015), posteriormente denominado estilos de pensar y hacer científicos (HACKING, 2009 y 2012); los cuales permiten reflexionar acerca de la manera como los científicos han construido conocimiento, al poner en evidencia que “pensamos con nuestras manos, con la totalidad de nuestros cuerpos.” (HACKING, 2010, p.11); es decir, como señala Clark (2003), los humanos como sujetos cognoscentes no sólo dependemos de un cerebro biológico, sino que, incluso desde nuestros primeros antepasados, las herramientas ideadas, desde las más básicas como afilar piedras para cortar carne, hasta las actuales como los computadores, han sido determinantes en las maneras de pensar y entender el mundo exterior. En palabras de este autor:

Nosotros -más que cualquier otra criatura sobre el planeta- utilizamos elementos no biológicos (instrumentos, medios, anotaciones) para complementar nuestros modos biológicos básicos de procesar, creando sistemas cognitivos extendidos, cuyos perfiles computacionales y de resolución de problemas son bastante diferentes de aquellos del cerebro desnudo. (CLARK, 2003, p.78).

En este sentido, los estilos de pensar y hacer científico ayudan a comprender los diferentes métodos de investigación, utilizados en la construcción de las teorías físicas y los criterios de validez que les subyacen; y, además, ofrecen a la enseñanza de la física un esquema conceptual más coherente para propiciar el desarrollo del razonamiento científico de los estudiantes; el cual constituye uno de los objetivos principales de la educación en ciencias, por favorecer habilidades para pensar creativamente y evaluar nuevas ideas de manera crítica (KIND; OSBORNE, 2017).

El enfoque de estilos de pensar y hacer científico comenta Hacking (2009), se deriva del trabajo del historiador de las ciencias A. C. Crombie, quien presentó un conjunto de

seis estilos de pensamiento científico en la tradición europea, en una conferencia en 1978 en Pisa (Italia). Cada uno de estos estilos tiene su propia trayectoria y línea de tiempo, sus propios objetos de estudio, métodos de razonar y criterios de validez de sus argumentos; tales estilos se denominan: estilos de pensar y hacer matemático, experimental, modelamiento hipotético, taxonómico, estadístico y probabilístico, e histórico genético.; los cuales han sido considerados en la educación en ciencias (Tabla 1), por autores como Kind y Osborne (2017).

**Tabla 1.** Ejemplos de los objetos de razonamiento, métodos y criterios de validez de los estilos de pensar y hacer científico.

| <b>Estilo de pensar y hacer científico</b> | <b>Objetos de razonamiento</b>  | <b>Métodos</b>  | <b>Criterios de veracidad</b>   |
|--|---|---|---|
| <b>Matemático</b>                          | Líneas euclidianas.<br>Formas geométricas.<br>Tasas de cambio.<br>Integrales.   | Métodos geométricos.<br>Bisección de ángulos.<br>Integración.<br>Diferenciación.<br>Métodos numéricos.                    | La deducción como un modo de argumentar   |
| <b>Experimental</b>                        | Instrumentos e instrumentación, por ejemplo, termómetros, pipetas, espectrómetro.   | Identificación de variables.<br>Control de variables.<br>Procedimientos para minimizar las incertidumbres de las medidas. | Hipótesis.<br>Pruebas experimentales.<br>Argumentos basados en controles/pruebas doble ciego.<br>Comparación de predicciones con resultados.<br>El papel de la replicación. |
| <b>Modelamiento hipotético</b>             | Masas puntuales idealizadas.<br>La luz como una onda/partícula<br>Los átomos como mini sistemas solares.<br>Modelos químicos.<br>Visualizaciones. | Experimentos mentales.<br>Modelos matemáticos.<br>Modelos por analogías.<br>Modelos representacionales                    | El valor heurístico de un modelo como una herramienta cognitiva.<br>Coherencia explicativa.<br>Los límites a la precisión y similitud de la representación                  |
| <b>Taxonómico</b>                          | Especies de seres vivos y cosas no vivas.<br>Tabla periódica.<br>Distinguir calor y temperatura.  | Criterios para separar/<br>distinguir entidades   | El rol de las categorías de clasificación en la identificación de entidades en el mundo material y de constructos en la   |

|                                     |   |   |   |
|-------------------------------------|---|---|---|
|                                     |   |   | explicación los fenómenos.  |
| <b>Estadístico y probabilístico</b> | Distribuciones estadísticas (por ejemplo, la gaussiana).<br>Significancia estadística.<br>Chi cuadrado. | Pruebas estadísticas estándar.<br>Criterios para establecer significación.<br>Procesamiento de datos. | El rol de la probabilidad y su importancia en la validez de las afirmaciones conocidas. |
| <b>Histórico genético</b>           | Gen.<br>ARN.<br>ADN.<br>Estratos de roca.<br>Magma.<br>Planetas.<br>Estrellas.<br>Los elementos.        | Técnicas para la determinación genética.<br>Modelado por computador.                                  | La naturaleza de un argumento abductivo.  |

**Fuente:** adaptación de Kind y Osborne (2017).

Estos estilos de pensar y hacer científicos (EPHC) no definen las disciplinas científicas, sino más bien son los EPHC empleados en ellas; además, no son excluyentes sino complementarios entre sí. En el caso particular del experimento de la doble rendija con electrones, en este artículo se aborda la pregunta ¿cuáles son los estilos de pensar y hacer científico, necesarios para analizar el experimento de la doble rendija con electrones individuales, para desarrollar el razonamiento científico de estudiantes? Cabe señalar que esta cuestión se enmarca en el desarrollo de la tesis doctoral del primer autor, titulada *Dificultades de aprendizaje de estudiantes de cursos introductorios de física cuántica en la interpretación del experimento de la doble rendija con electrones*.

## METODOLOGÍA

Para determinar cuáles son los estilos de pensar y hacer científico, necesarios para analizar y comprender el experimento de la doble rendija con electrones individuales, se estudiaron cinco artículos (BACH et al., 2013; DONATI; MISSIROLI; POZZI, 1973; JÖNSSON, 1974; MERLI; MISSIROLI; POZZI, 1976; TONOMURA et al., 1989), y dos libros de texto de mecánica cuántica (BALLENTINE, 1998; FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2011), que presentan de manera detallada el análisis de este experimento.

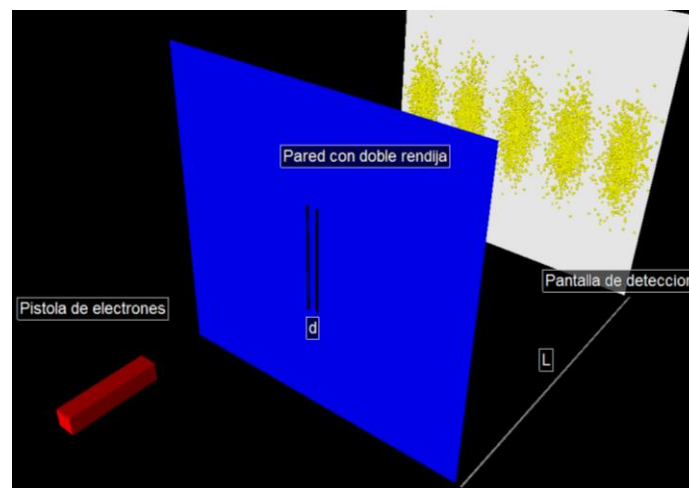
El estudio de estos documentos se llevó a cabo mediante la metodología de análisis de contenido, en el que las categorías de análisis son los seis estilos de pensar y hacer



científicos (HACKING, 2012, 2015), y en cada una de estas se consideraron tres subcategorías: objetos de razonamiento, métodos de indagación, y criterios de veracidad. En primer lugar, se tomó en consideración la totalidad de cada documento que presenta el experimento de la doble rendija con electrones, leyendo y analizando detalladamente cada exposición del experimento a la luz de los seis estilos; como resultado de este procedimiento se estableció que son cuatro estilos de pensar y hacer científico los que subyacen al abordaje del experimento; y en particular, para cada estilo, se identificaron sus objetos de razonamiento, métodos seguidos y criterios de veracidad.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para estudiar el fenómeno de la dualidad de los electrones, los científicos han llevado a cabo el experimento de la doble rendija que se esquematiza en la Figura 1. En este experimento, un cañón envía electrones, de uno en uno, con una energía bien definida, sobre una pared que tiene dos rendijas muy delgadas que están separadas una distancia  $d$ . Más allá de esta pared, a una distancia  $L$ , se encuentra una pantalla que detecta el punto de impacto de cada uno de los electrones que atraviesa la doble rendija.



**Fuente:** Elaboración propia.

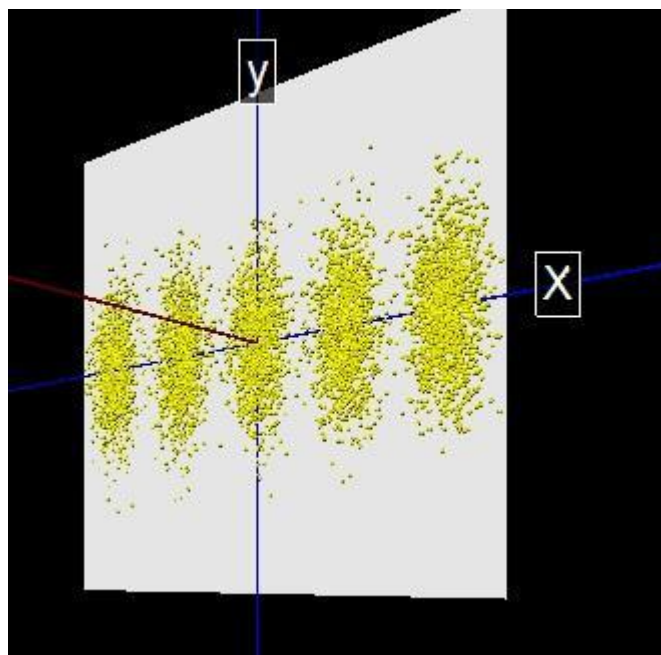
**Figura 1** – Esquema del experimento de la doble rendija con electrones. La pistola de electrones envía con una energía bien definida un electrón sobre la pared con doble rendija. Después cada electrón es detectado en la pantalla, esquematizado de color amarillo.

Recebido em: 20/01/2023

Aceito em: 20/03/2023

Este es un experimento estadístico, cuyas condiciones de realización son: electrones individuales con la misma energía cinética son enviados en la misma dirección, y dispersados por una doble rendija. Los resultados son los lugares geométricos del impacto de cada electrón sobre la pantalla de detección. A pesar de que las condiciones iniciales son las mismas, los electrones golpean la pantalla en diferentes lugares; encontrándose que las frecuencias relativas de estos lugares de impacto se estabilizan, mostrando así una regularidad de estos en la pantalla de detección (ver Figuras 1 y 2), caracterizada por una densidad de impactos en ciertas regiones y en otras no, análogo a las franjas de interferencia de las ondas.

Antes de este experimento, Louis De Broglie propuso que la materia debería tener un comportamiento ondulatorio, así como la radiación electromagnética presenta comportamiento corpuscular y ondulatorio; de este modo, De Broglie postuló que la longitud de onda  $\lambda$  asociada a una partícula material está dada por  $\lambda = h/p$ , donde  $h$  es la constante de Planck y  $p$  es la magnitud de la cantidad de movimiento lineal de dicha partícula. Davisson y Germer (1927) llevaron a cabo un experimento de difracción de un haz de electrones por un cristal de níquel, que les permitió confirmar la hipótesis de De Broglie, aunque aún no era claro la naturaleza ondulatoria de estas partículas.



Recebido em: 20/01/2023

Aceito em: 20/03/2023



**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 2** – Esquema de los resultados del experimento de la doble rendija con electrones.

El primer experimento de doble rendija fue llevado a cabo por Jönsson (1974) en 1961 pero no con electrones individuales sino con un haz de electrones de 50 keV, que pasan a través de dos rendijas, cada una de 0.5  $\mu\text{m}$  de espesor y separadas entre sus centros por 2.0  $\mu\text{m}$ . Donati, Missiroli y Pozzi (1973) son los primeros en realizar un experimento con electrones individuales, pero en lugar de emplear una doble rendija emplean un biprisma de electrones (dispositivo similar al biprisma óptico de Fresnel para partículas cargadas, compuesto de un cable cargado positivamente, colocado entre dos electrodos planos paralelos), cuyo efecto es igual al de la doble rendija; los electrones son acelerados a 80 keV y el espaciamiento de las “rendijas” es superior a 1,3  $\mu\text{m}$ , (dependiendo del voltaje aplicado al biprisma de electrones). De la información suministrada por el microscopio electrónico y demás dispositivos empleados en el experimento se deduce que los electrones son individuales, están separados entre ellos unos 200 metros, pero el registro en la pantalla solo muestra el resultado final del impacto de todos. Posteriormente, Merli, Missiroli y Pozzi (1976) logran registrar por observación directa que el patrón de interferencia es producto de la suma de muchos eventos independientes; siendo este experimento el primero en registrar el proceso estadístico en la formación de las franjas al ir aumentando el número de electrones que impactan la pantalla. Un registro análogo es obtenido por Tonomura et al. (1989), al acelerar electrones individuales a 50 keV, también empleando un biprisma en vez de una doble rendija. Bach et al. (2013), utiliza una doble rendija de 62 nm de ancho y separadas 272 nm de centro a centro, y logra observar directamente la formación de las franjas de interferencia al aumentar el número de electrones enviados, con una energía de 600 eV.

El análisis realizado a los cinco artículos estudiados permite identificar en la presentación de estos experimentos cuatro estilos de pensar y hacer científico: estilos matemático, experimental, modelamiento hipotético, y el estadístico y probabilístico (Ver Tabla 2).

**Tabla 2.** Estilos de pensar y hacer científicos identificados en los artículos científicos.

| Estilos                        | Jönson (1974) – 1961.   | Donati et al. (1973)   | Merli et al. (1976)   | Tomomura et al. (1989)   | Bach et al. (2013)  |
|--------------------------------|---|--|---|--|---|
| <b>Matemático</b>              | Esquema geométrico que explica la interferencia de ondas.   | Esquema geométrico que explica la interferencia de ondas.  | Esquema geométrico que explica la interferencia de ondas.   | Esquema geométrico que explica la interferencia de ondas.  | Esquema geométrico que explica la interferencia de ondas.   |
| <b>Experimental</b>            | <p>Producción de rendijas de difracción (de 1 a 5 rendijas).</p> <p><i>Objetos:</i> materiales como plata, hidrocarburo polimerizado, cobre, entre otros.</p> <p>Instrumentos como fuente de haz de electrones, lentes magnéticos, obturador.</p> <p><i>Métodos:</i> evaporación al vacío, impresión con haz de electrones, baño electrolítico.</p> <p><i>Criterio de veracidad:</i> Compara sus resultados con la teoría óptica de difracción.</p> | <p>Construcción del biprisma (reemplaza la doble rendija)</p> <p><i>Objetos:</i> materiales no magnéticos, aislantes, cartucho de microscopio electrónico estándar.</p> <p><i>Método:</i> Valor de parámetros para lograr la condición de buen contraste entre las franjas que forman la interferencia.</p> <p><i>Criterio de veracidad:</i> Los resultados son análogos a la difracción óptica.</p> | <p>El mismo experimento de Donati et al. (1973).</p> <p><i>Objetos:</i> utiliza un TV image intensifier (intensificador de imagen de TV).</p> <p><i>Método:</i> Observación directa del proceso estadístico de formación de las franjas.</p> <p>Registran en la pantalla de TV como llegan los electrones de uno en uno y van formando el patrón de interferencia.</p> <p><i>Criterio de veracidad:</i> El resultado es como lo predice la mecánica cuántica.</p> | <p>Mejora la precisión de Donati et al. (1973) y Merli et al. (1976).</p> <p><i>Objetos.</i> Microscopio electrónico, biprisma de electrones, y sistema de conteo de electrones de sensibilidad de posición.</p> <p><i>Método:</i> Observación directa del proceso estadístico de formación de las franjas.</p> <p><i>Criterio de veracidad.</i> El resultado es como lo predice la mecánica cuántica.</p> | <p>Doble rendija y experimento mental de Feynman.</p> <p><i>Objetos:</i> Filamento termoiónico de tungsteno, lentes electrostáticas, doble rendija, lente cuadrupolar electrostática, y placa microcanal bidimensional.</p> <p><i>Método:</i> Adicional al uso de la doble rendija, tapa de a una cada rendija y no observa interferencia.</p> <p><i>Criterio de veracidad.</i> El resultado es como lo predice la mecánica cuántica.</p> |
| <b>Modelamiento hipotético</b> | Se asume la hipótesis de De Broglie.  | Se asume la hipótesis de De Broglie.<br><br>El electrón interfiere consigo mismo, lo   | Se asume la hipótesis de De Broglie.<br><br>Interpretación estadística del comportamiento ondulatorio   | Se asume la hipótesis de De Broglie y se aplica a electrones relativistas.   | Se asume la hipótesis de De Broglie.<br><br>El análisis e basa en el experimento mental de la doble   |

|                                     |                               |  |  |  |  |
|-------------------------------------|-------------------------------|--|--|--|--|
|                                     |                               | que sugiere un comportamiento ondulatorio de un solo electrón.<br><br>Deducción de que solo hay un electrón durante un lanzamiento.  | de los electrones.   | Explica los criterios para formar el patrón de interferencia del biprisma de electrones.<br><br>Un solo electrón pasa a través de las dos rendijas.<br><br>Interpretación de Copenhague y uso del colapso de la función de onda. | rendija de Feynman.  |
| <b>Estadístico y probabilístico</b> | No hace análisis estadístico. | No se ve simultáneamente la formación de las franjas, pero concluye que los electrones que forman la imagen no interactúan entre sí. | El resultado es la visualización de la suma de muchos eventos independientes . | El resultado es la visualización de la suma de muchos eventos independientes .   | El resultado es la visualización de la suma de muchos eventos independientes |

En el libro de texto de Feynman et al. (2011) se compara teóricamente el experimento de la doble rendija con electrones con dos experimentos de doble rendija, uno con balines y el otro con ondas en una superficie de agua, para analizar la naturaleza de los electrones. Así, los autores afirman que los electrones tienen un comportamiento extraño, dado que, una vez atraviesan la doble rendija, se localizan como partículas individuales en la pantalla de detección, pero estadísticamente forman un patrón de interferencia como el obtenido por las ondas de agua al atravesar una doble rendija. Adicional, los autores proponen un experimento mental en el que se quiere ver por cuál rendija pasa cada electrón, utilizando una fuente de luz monocromática (con longitud de onda específica), ubicada en la mitad de la separación de las dos rendijas, entre estas y la pantalla de detección, de tal forma que cuando cada electrón pasa por una de las rendijas

es iluminado, creando un destello al interactuar y por ende cambiando la magnitud y dirección de la cantidad de movimiento que llevaban al atravesar la doble rendija, permitiendo así saber por cual rendija pasaron; generándose un patrón que ya no es de interferencia, en la pantalla de detección. Es decir, el observador destruye la interferencia al intentar averiguar por cuál rendija pasa cada electrón, y esto se explica haciendo uso el principio de indeterminación de Heisenberg.

Por su parte, Ballentine (1998) asumiendo la interpretación estadística de la mecánica cuántica, considera al electrón como una partícula y, en el experimento de la doble rendija, asume la indeterminación como azar intrínseco al fenómeno; lo que implica que no es posible determinar en qué lugar de la pantalla de detección impactará cada electrón; sin embargo, el conjunto de posiciones de impacto se aproxima a un límite estable al ir aumentando el número de electrones. La explicación del patrón de interferencia se basa en el teorema de Bloch, el cual dice que los fenómenos de interferencia de las partículas cuánticas, cuando interactúan con una red cristalina, como la doble rendija o cualquier arreglo periódico, se debe a una transferencia de la cantidad de movimiento debido a la periodicidad espacial de la red cristalina. De esta manera no se ve la necesidad de asociarle a las partículas propiedades ondulatorias que se considera poco claras. La Tabla 3 resume los estilos de pensar y hacer científicos identificados en los textos de Feynman et al. (2011) y Ballentine (1998).

**Tabla 3.** Estilos de pensar y hacer científicos identificados en los textos de Feynman et al. (2011) y Ballentine (1998).

| Estilos                        | Feynman et al. (2011)   | Ballentine (1998)  |
|--------------------------------|---|--|
| <b>Matemático</b>              | Esquema geométrico de la interferencia: considerando proyectiles, una cubeta de ondas y electrones.<br><br>Suma de amplitudes de números complejos.               | Utiliza el formalismo de la mecánica cuántica.<br><br>$\hat{A} \psi\rangle = a \psi\rangle$  |
| <b>Modelamiento hipotético</b> | Experimento mental de doble rendija con proyectiles, ondas y electrones.<br><br>Probabilidad de un evento igual al cuadrado de la amplitud de un número complejo. | <i>Estado</i> es una abreviatura de <i>procedimiento de preparación del estado</i> .<br><br>Estado que cumple la ecuación de valores propios para la cantidad de movimiento. |

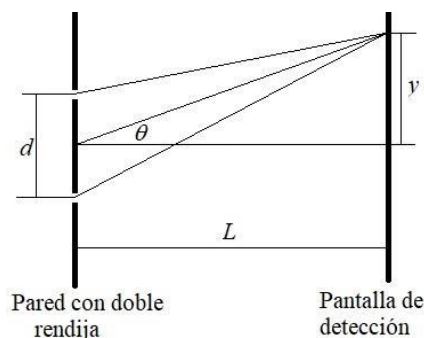
|  |   |  |
|--|---|--|
|  | <p>Experimento mental adicional: Intentar “ver” por cuál rendija pasa el electrón. Se destruye la interferencia por interacción con los fotones.</p>  | $\hat{P} \psi\rangle = p \psi\rangle$ <p>Utiliza el teorema de Bloch para establecer la transferencia de cantidad de movimiento entre un haz de partículas y una red cristalina. La solución de la ecuación de Schrödinger admite una función de onda periódica si el potencial al que está sometido el haz también es periódico. Dicha transferencia está cuantizada para que se cumplan las condiciones de periodicidad.</p>   |
| <p><b>Estadístico y probabilístico</b></p> | <p><i>Objeto:</i> Distribución de probabilidad<br/><i>Método:</i> Probabilidad de detección = frecuencia relativa</p> <p>Interpretación de la interferencia de acuerdo con la distribución de los electrones.</p> <p>La distribución de la posición de impacto de los electrones es la suma de muchos eventos independientes.</p> | <p>Un experimento estadístico consiste en una larga secuencia de preparaciones y mediciones idénticas; las frecuencias relativas de los diversos resultados posibles de las mediciones individuales por lo general se aproximan a un límite estable.</p> <p>En particular para la doble rendija, hace notar que no hay contradicción con el axioma de suma de probabilidades de eventos excluyentes, ya que se trata de probabilidades que deben ser condicionales; esto es, para la mecánica cuántica, las condiciones experimentales son distintas si una u otra rendija, o ambas, están abiertas.</p> |

A continuación, se describe cada uno de los cuatro estilos de pensar y hacer científico que se requieren para analizar y comprender el experimento de la doble rendija con electrones.

### *Estilo de pensar y hacer matemático*

Se pone en evidencia con el esquema geométrico de la interferencia de ondas planas que chocan con un obstáculo que tiene dos aberturas o rendijas separadas una distancia  $d$  (ver Figura 3). Los objetos de este estilo de pensar y hacer son las rectas con diferentes direcciones (ángulos), las cuales representan las direcciones de ondas de longitud  $\lambda$  bien definida. Los métodos de este estilo son los axiomas y teoremas de la geometría y la trigonometría. La forma de describir el experimento presenta deducciones que conducen al valor de la longitud de onda como función de: la separación de las franjas, la separación

de las rendijas y la distancia  $L$  entre la doble rendija y la pantalla de detección. La aproximación propuesta es que  $d \ll L$ , ya que la diferencia de caminos necesaria para generar una interferencia constructiva en el punto  $y$  es un múltiplo de la longitud de onda  $n\lambda = \frac{yd}{L}$ , debido a que la separación entre dos franjas consecutivas es  $\Delta = \frac{\lambda L}{d}$ .



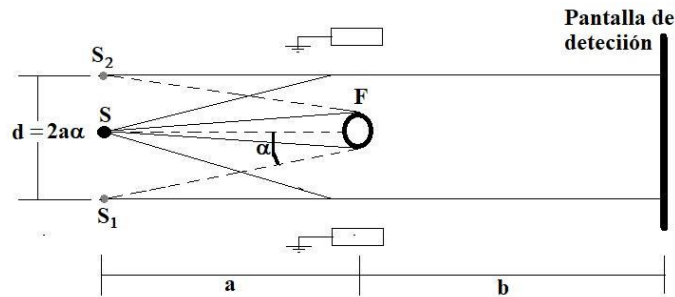
Fuente: Elaboración propia.

**Figura 3** – Esquema experimental de la doble rendija y formación de franjas. Se deduce el valor de  $y$  correspondiente a máximos de interferencia o interferencia constructiva.

Aunque no todos los documentos analizados muestran explícitamente estas relaciones matemáticas, ellas están implícitas al dar los valores de la longitud de onda basados en la hipótesis de De Broglie, la cual se deduce del reporte de la energía cinética con que son enviados los electrones.

Otro aspecto que cabe mencionar es la configuración del biprisma de electrones, que hace las veces de doble rendija (ver Figura 4), y por lo tanto corresponde al difractor en los experimentos de Donati, Missiroli y Pozzi (1973), Merli, Missiroli y Pozzi (1976) y Tonomura et al. (1989). Para llevar a cabo el experimento de interferencia con el biprisma, se tiene una fuente **S** que emite electrones a una distancia **a** de este. El efecto del biprisma sobre los electrones es desviarlos, dependiendo de por cuál lado del biprisma pasan, haciendo que se dirijan hacia una pantalla de detección ubicada a una distancia **b** de este. El efecto del biprisma es simular dos fuentes coherentes  $S_1$  y  $S_2$  separadas una distancia  $d=2a\alpha$ , desde donde salen los electrones.





Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4** – Esquema experimental de interferencia de electrones con biprisma y analogía con la doble rendija.

El estilo de pensar y hacer matemático se ha limitado a los aspectos geométricos relevantes en la analogía con el problema de ondas puntuales y coherentes, que parten desde dos puntos e interfieren constructiva y destructivamente a medida que se desplazan y se encuentran. Es pertinente mencionar que lo que se muestra son las deducciones matemáticas en las que están implícitos los axiomas de la geometría y la trigonometría, que permiten validar los procedimientos seguidos. Existen otros aspectos matemáticos, pero en este análisis se ubican en el estilo experimental, al considerar la construcción de aparatos, los métodos que permite identificar y controlar variables, y la replicación y comparación de resultados con hipótesis previas.

### *Estilo de pensar y hacer experimental*

Dada la complejidad de los aparatos que se utilizan para realizar el experimento de la doble rendija con electrones individuales, y que el problema abordado en este artículo es identificar los estilos de pensar y hacer científico, se esbozan brevemente los aspectos más relevantes de los dos dispersores: la construcción de las rendijas y del biprisma de electrones.

El método de construcción de las rendijas de acuerdo con Jönsson (1974), consistió en producir una fina capa de plata sobre una placa de vidrio, para que sea conductora eléctrica. Luego se imprimen tiras de hidrocarburo polimerizado sobre la capa de plata, apuntando un haz de electrones sobre esta. El número, ancho, largo y separación de las

tiras corresponde al número y dimensiones de las rendijas deseadas. Después se recubre la placa con una capa de cobre en un baño electrolítico, dejando sin recubrir las porciones de la capa de plata cubiertas por el hidrocarburo polimerizado. A medida que crece la capa de cobre, se crean las rendijas. La capa de cobre se desprende del soporte de vidrio, dejando atrás la capa de plata y las tiras de polímero en la posición de las ranuras. De esta manera se obtiene una lámina de cobre con las rendijas. Posteriormente, Bach et al. (2013) fabricaron la doble rendija mediante fresado con haz de iones enfocado (FIB), enviando iones de galio de 30 keV sobre una membrana de nitruro de silicio.

El biprisma de electrones consta de un cable recto y delgado a un potencial positivo, colocado entre dos electrodos planos y paralelos conectados a tierra, generando un campo eléctrico de tal forma que cuando los electrones enviados sobre el biprisma, pasan por uno u otro lado del cable, y son desviados hacia el centro, dando la impresión de provenir de dos puntos distintos, asemejándose a la doble rendija.

El experimento de Jönsson (1974) se realizó con un haz de electrones, mientras que los otros se realizaron con electrones individuales. Por ejemplo, en el experimento de Donati, Missiroli y Pozzi (1973), se realiza una deducción matemática de la separación entre los electrones a partir de la densidad de corriente sobre el plano de detección, concluyendo que la distancia entre dos electrones, de la corriente generada, es de 200 metros, muy superior a las dimensiones del experimento, de unos 20 cm. En el experimento de Tonomura et al. (1989) la distancia deducida fue de 150 km, y en el de Bach et al. (2013) de  $2 \times 10^6$  m, lo que daba espaciamentos que aseguran un único electrón en el sistema.

La comparación con las predicciones y la replicación de los resultados frente a los valores de los parámetros que se controlan y se ajustan, son el criterio de veracidad de este estilo. En particular, en Bach et al. (2013) compararon sus resultados y los validan con los obtenidos con un modelo teórico simulado, por medio de integrales de camino.

### ***Estilo de pensar y hacer por modelamiento hipotético***

Recebido em: 20/01/2023

Aceito em: 20/03/2023

Salvo el texto de Ballentine (1998), los demás parten de la hipótesis de De Broglie, en la que el electrón es una partícula cuántica cuyo comportamiento es análogo al de la radiación electromagnética; por lo tanto, debe exhibir características ondulatorias. De Broglie combinó la ecuación de energía de un fotón  $E_\gamma = h\nu$ , y de su cantidad de movimiento  $p = E_\gamma/c$ , con la ecuación de energía de cualquier partícula de masa  $m$ ,  $E = mc^2$  (BAGGOTT; 2011), siendo  $h$  la constante de Planck,  $\nu$  la frecuencia del fotón y  $c$  la velocidad de la luz. Por otro lado, para una onda en general, la longitud de onda se calcula como  $\lambda = \frac{V_f}{\nu}$  donde  $V_f$  es la velocidad de fase; entonces, si la velocidad de un fotón es  $c$ , resulta  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ; reemplazando la frecuencia y la cantidad de movimiento  $\lambda = \frac{c}{\left(\frac{E}{h}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{pc}{h}\right) = \frac{h}{p}}$ ; la cual se puede extender a las partículas materiales. Así, De Broglie sugiere un comportamiento ondulatorio de la materia; de ahí es posible afirmar que los electrones se difractan al igual que un rayo de luz, y presentan el fenómeno de interferencia.

Tonomura et al. (1989) expresan que  $\lambda = h/\sqrt{2m|eV|\left(1 + \frac{|eV|}{2mc^2}\right)}$ , donde  $m$  es la masa en reposo del electrón,  $e$  es su carga,  $c$  es la velocidad de la luz y  $V$  es el potencial de aceleración. Esta expresión de  $\lambda$  se deduce al determinar la cantidad de movimiento  $p$  de una partícula a partir de su energía cinética  $K$ , en términos relativistas.

El texto de Ballentine (1998) asume la interpretación estadística de la mecánica cuántica. La explicación de los fenómenos de interferencia de las partículas cuánticas se basa en el teorema de Bloch, que dice que cuando un haz de partículas incide sobre una red cristalina con vector de red  $R_n$ , la función de onda se puede tomar como una superposición de ondas planas que cumplen  $k^{\rightarrow} = k^{\rightarrow} + G_m^{\rightarrow}$ , donde  $k^{\rightarrow}$  es el vector de onda de las partículas reflejadas por la red cristalina,  $k^{\rightarrow}$  es el vector de onda de las partículas incidentes y  $G_m^{\rightarrow}$  es el vector de red recíproca. De esta manera los valores de  $k^{\rightarrow}$  o de la cantidad de movimiento  $p^{\rightarrow} = \hbar k^{\rightarrow}$  deben satisfacer  $p^{\rightarrow} = p^{\rightarrow} + \hbar G_m^{\rightarrow}$ . De esta manera, la explicación de la interferencia se da por medio de la transferencia de cantidad

de movimiento cuantizada hacia y desde un objeto periódico, y no sugiere ni requiere ninguna hipótesis de que la partícula deba identificarse literalmente con una onda.

Feynman, Leighton y Sands (2011) proponen el experimento mental de cerrar una de las rendijas al lanzar los electrones. Las franjas en la pantalla de detección desaparecen y se ve una distribución continua cuyo máximo está frente a la rendija abierta y decrece monótonamente a ambos lados. Los autores afirman que la suma de los resultados individuales; esto es, superponer los resultados de una rendija abierta y la otra cerrada, no son iguales al resultado de las dos rendijas simultáneamente abiertas. Esto se debe a que consideran que se envían partículas, y estas pasan por una u otra rendija, por lo cual serían eventos excluyentes; lo que implica que los electrones son objetos complejos, partículas individuales que pasan por las dos rendijas interactuando consigo mismo.

Bach et al. (2013) realizan el anterior experimento anteponiendo un obstáculo adicional entre la doble rendija y la pantalla de detección, simulando así que una rendija está abierta y la otra cerrada. Ellos obtienen un patrón de interferencia si las dos rendijas están abiertas, el cual se pierde cuando una de las dos rendijas se cierra, confirmándose el experimento mental de Feynman, Leighton y Sands (2011).

La explicación de este experimento desde la interpretación estadística no requiere de ondas, ya que los patrones en la pantalla de detección son probabilidades condicionales ajustadas a las condiciones del experimento, ya sea una de las rendijas cerrada o las dos abiertas. De esta manera, la distribución de probabilidad  $P$  de los impactos de los electrones en cualquier punto  $y$  de la pantalla, dado que pasó por la rendija #1, denotado por  $P(y|\#1)$ , es una distribución continua con un solo máximo frente a esta rendija. De igual manera, la distribución de probabilidad  $P$  de los impactos de los electrones en cualquier punto  $y$  de la pantalla, dado que pasó por la rendija #2, denotado por  $P(y|\#2)$  es también continua con el máximo frente a la rendija #2. Pero cuando las dos rendijas están abiertas la distribución de probabilidad  $P(y|\#1 \wedge \#2)$  es una distribución con varios máximos y mínimos igualmente espaciados que dan la idea de la formación de franjas de interferencia. Experimentalmente se encuentra que  $P(\#1) + P(\#2) \neq$

$P(\#1 \wedge \#2)$ , lo cual expresa que las probabilidades están ligadas a las condiciones en que se realiza el experimento.

### ***Estilo de pensar y hacer estadístico y probabilístico***

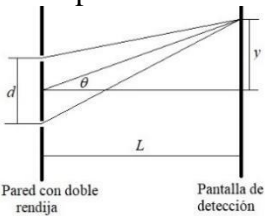
Un sistema físico cuyo estudio implica hacer experimentos aleatorios, requiere de una larga secuencia de repeticiones de mediciones, preparadas en condiciones iniciales idénticas. No hay reproducibilidad de eventos individuales sino estabilización de las frecuencias relativas de muchas mediciones. Esto es lo que muestran los experimentos de Donati, Missiroli y Pozzi (1973), Tonomura et al. (1989) y Bach et al. (2013), así como el experimento mental de Feynman, Leighton y Sands (2011), cuando envían uno a uno electrones de la misma energía sobre una doble rendija o biprisma de electrones. No es posible predecir en qué lugar sobre la pantalla incidirá un electrón en particular, pero sí es posible inferir la probabilidad de lugar de impacto a partir de las frecuencias relativas de los lugares de incidencia.

El patrón de interferencia obtenido es el resultado de un experimento estadístico; es decir, una distribución de múltiples mediciones. La frecuencia relativa de que un electrón llegue a un punto  $A$  de la pantalla será  $f_A = n_A/N$ , donde  $n_A$  es el número de electrones que llegan al punto  $A$  y  $N$  el número total de electrones que llegaron a la pantalla. Cuando el número de electrones tiende a infinito,  $N \rightarrow \infty$ , la frecuencia relativa en el punto  $A$  tiende a la probabilidad de llegada en este punto,  $f_A \rightarrow P_A$ , donde  $P_A$  es la probabilidad de que un electrón llegue al punto  $A$  (El teorema de máxima verosimilitud indica por qué la suposición que a mayor  $N$  más ‘nos acercamos’ a la probabilidad. En realidad, es que  $f_A$  es más probable que sea  $P_A$ ). La física cuántica es de carácter probabilístico, es decir, no se sabe a dónde llegará el electrón sobre la pantalla por lo que no se puede inferir una trayectoria para una condición dada, solo se conoce la probabilidad de que llegue a un lugar específico de esta. El resultado experimental es la probabilidad de que un electrón alcance la pantalla en un punto cualquiera, pensada como una probabilidad condicionada a la preparación del experimento.

**Estilos de pensar y hacer científicos en el experimento de la doble rendija**

A manera de síntesis, la Tabla 4 muestra un resumen de los cuatro estilos de pensar y hacer científicos que se identificaron al estudiar las distintas versiones del experimento de la doble rendija, y que permiten abordar de manera distinta el problema de la dualidad onda-partícula. Es claro que los cuatro estilos son necesarios para razonar científicamente el fenómeno cuántico de este experimento.

**Tabla 4.** Estilos de pensar y hacer científicos involucrados en la explicación del experimento de la doble rendija con electrones.

| <b>Estilo de pensar y hacer científico</b> | <b>Objetos de razonamiento</b>  | <b>Métodos</b>  | <b>Criterios de veracidad</b>  |
|--|---|---|--|
| <p><b>Matemático</b></p>                   | <p>Aspectos geométricos del montaje experimental.</p>  <p>Pared con doble rendija      Pantalla de detección</p> $n\lambda = yd/L$ | <p>Relaciones geométricas y trigonométricas.</p>  | <p>Deducción de la longitud de onda de De Broglie.</p> <p>Deducción de espaciamiento entre franjas:</p> $\Delta = \lambda L/d$                                 |
| <p><b>Experimental</b></p>                 | <p>Doble rendija.</p> <p>Biprisma de electrones.</p> <p>Pantalla de detección.</p> <p>Amperímetro.</p>  | <p>Posiciones inicial y final del electrón.</p> <p>Variables que se controlan como la energía cinética y las dimensiones de cada uno de los dispositivos.</p> | <p>Comparación de resultados con la hipótesis de De Broglie.</p> <p>Analogía con la cubeta de ondas.</p> <p>Comparación con el experimento de Young (luz).</p> |



|                                     |   |  |  |
|-------------------------------------|---|--|--|
|                                     |   |  | Comparación con los fenómenos ópticos.   |
| <b>Modelamiento hipotético</b>      | Hipótesis de De Broglie.<br><br>Teorema de Bloch. | Analogía del comportamiento de la radiación electromagnética con la materia.<br><br>Solución formal en términos de ondas planas. | Coherencia entre resultados experimentales con la hipótesis de De Broglie.<br><br>Coherencia entre resultados experimentales con las soluciones teóricas del teorema de Bloch. |
| <b>Estadístico y probabilístico</b> | Experimento aleatorio.                            | Estabilidad de las frecuencias relativas.<br>Máxima verosimilitud.   | Probabilidad frecuencial.  |

El estudio del experimento de la doble rendija con electrones con el objetivo de identificar los estilos de pensar y hacer científico permite abordar dos interpretaciones de la mecánica cuántica: la de Copenhague y la estadística. La primera afirma que el electrón es una entidad cuántica y que, según el experimento, se puede modelar o por una partícula o por una onda, pero nunca de ambas formas simultáneamente. Y, en el experimento de la doble rendija el electrón se comporta como una onda; sin embargo, el experimento muestra que los electrones llegan individualmente a un punto perfectamente localizable, por lo que se modelan como partículas, y no es claro cómo se asocia una onda a cada electrón. La segunda interpretación, la estadística, pone en evidencia que, aunque los electrones son partículas, no es posible asociarles trayectorias debido a que el experimento individual, el de un único electrón enviado que alcanza la pantalla, no es replicable; esto significa que al repetir el lanzamiento en idénticas condiciones el electrón llega a otro punto, de manera aleatoria. Entonces, lo que es replicable es la distribución de probabilidades del experimento aleatorio (BALLENTINE, 1998). De esta manera, la interpretación estadística parece más adecuada para explicar el experimento de doble

rendija con partículas individuales, porque no requiere de una naturaleza ondulatoria que no es del todo clara; pero, abordar la interpretación de Copenhague les permite a los estudiantes contrastar de manera argumentada la dualidad onda-partícula en estas dos interpretaciones; dado que, la comunidad científica aún no se decanta por una sola interpretación.

## CONCLUSIONES

El análisis del experimento de la doble rendija con electrones, desde el enfoque de los estilos de pensar y hacer científicos, permite comprender y desglosar los diferentes modos de razonar en la física cuántica; lo cual puede enriquecer los modos de plantear la enseñanza de la mecánica cuántica a nivel introductorio.

El estudio del experimento de la doble rendija con electrones permitió identificar cuatro estilos de pensar y hacer científicos: el estilo matemático, el estilo experimental, el estilo de modelamiento hipotético, y el estilo estadístico y probabilístico. En cada uno de ellos se establecieron sus objetos de razonamiento, sus métodos y sus criterios de veracidad. Una implicación en la enseñanza de la física es que no es posible centrarse en uno solo de los estilos de pensar y hacer científico, para comprender los conceptos y principios que subyacen al estudio del experimento abordado.

## REFERENCIAS

AYENE, M.; KRIEK, J.; DAMTIE, B. Wave-particle duality and uncertainty principle: Phenomenographic categories of description of tertiary physics students' depictions, **Physical Review Special Topics-Physics Education Research**, vol. 7, no 2, p. 020113, 2011.

BACH, R., et al. Controlled double-slit electron diffraction. **New Journal of Physics**, vol. 15, no 3, p. 033018, 2013.

BAGGOTT, J. **La historia del cuanto. Una historia en 40 momentos**. Biblioteca Buridán, 2011.

BALLENTINE, L. E. **Quantum mechanics: a modern development**. World Scientific Publishing Company, 1998.

Recebido em: 20/01/2023

Aceito em: 20/03/2023

CASTRO MORENO, J. A. Conocimiento práctico, historia, filosofía y enseñanza de la biología: el caso de la herencia biológica. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, no. 34, p. 103 – 125, 2013.

CLARK, A. **Natural-Born Cyborgs: Minds, Technologies, and the Future of Human Intelligence**. Oxford University Press, 2003.

CROMIBIE, A. C. Philosophical presuppositions and shifting interpretations of Galileo. En: HINTIKKA, Jaakko; GRUENDER, David; AGAZZI, Evandro (ed.) **Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology: Proceedings of the 1978 Pisa Conference on the History and Philosophy of Science, vol I**. Dordrecht: D. Reidel. p. 271-286, 1981.

DAVISSON, C. J.; GERMER, L. H. Diffraction of electrons by a cristal of nickel. **The Physical Review**, vol. 30, no 6, p. 705-741, 1927.

DONATI, O.; MISSIROLI, G. P.; POZZI, G. An experiment on electron interference. **American Journal of Physics**, vol. 41, no 5, p. 639-644, 1973.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman lectures on physics; vol. 3**, The new millenium edition, Basic Books, 2011.

GOMES DA SILVA, A.; ALVES PEREIRA DE CARVALHO, H.; STRIEDER PHILIPPSEN, G. Ensino de Física Moderna no Ensino Médio: uma proposta didática para o estudo da evolução do modelo atômico. **Revista Insignare Scientia - RIS**, v. 5, n. 3, p. 392-408, 13 ago. 2022.

HACKING, I. Statistical language, statistical truth and statistical reason: The selfauthentication of a style of reasoning. In **The Social dimensions of science**, ed. E. McMullin, 130–157. Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1992.

HACKING, I. **Scientific reason**. Taipei: National Taiwan University Press, 2009.

HACKING, I. Prueba, Verdad, Manos y Mente, **Cuadernos de epistemología 5. Reflexiones en torno a la Filosofía de la Ciencia y la Epistemología**. Universidad del Cauca, p 11- 37, 2011.

HACKING, I. ‘Language, truth and reason’ 30 years later, **Studies in History and Philosophy of Science Part A**, vol. 43, no 4, p. 599-609, 2012.

HACKING, I. Probable reasoning and its novelties, en **Relocating the History of Science**. Springer, Cham. p. 177-192, 2015.

Recebido em: 20/01/2023

Aceito em: 20/03/2023

JÖNSSON, C. Electron diffraction at multiple slits, **American Journal of Physics**, vol. 42, no 1, p. 4-11, 1974.

KIND, P. E. R.; OSBORNE, J. Styles of scientific reasoning: A cultural rationale for science education? **Science education**, vol. 101, no 1, p. 8-31, 2017.

KRIJTENBURG-LEWERISSA, K., et al. Insights into teaching quantum mechanics in secondary and lower undergraduate education, **Physical review physics education research**, vol. 13, no 1, p. 010109, 2017.

KRIJTENBURG-LEWERISSA, K., et al. Key topics for quantum mechanics at secondary schools: a Delphi study into expert opinions, **International Journal of Science Education**, vol. 41, no 3, p. 349-366, 2019.

MANNILA, K.; KOPONEN, I. T.; NISKANEN, J. A. Building a picture of students' conceptions of wave-and particle-like properties of quantum entities, **European journal of physics**, vol. 23, no 1, p. 45, 2001.

MARSHMAN, E.; SINGH, C. Framework for understanding the patterns of student difficulties in quantum mechanics, **Physical Review Special Topics-Physics Education Research**, vol. 11, no 2, p. 020119, 2015.

MERLI, P. G.; MISSIROLI, G. F.; POZZI, G. On the statistical aspect of electron interference phenomena, **Am. J. Phys**, vol. 44, no 3, p. 306-307, 1976.

OLSEN, R. V. Introducing quantum mechanics in the upper secondary school: a study in Norway. **International Journal of Science Education**, vol. 24, no 6, p. 565-574, 2002.

PESSOA JR, O. Mapa das interpretações da Teoria Quântica. Física: En: MARTINS, R. A; BOIDO, G; RODRÍGUEZ, V. (orgs), **Física: Estudos Filosóficos e Históricos**. Campinas: AFHIC, pp. 119-152, 2006.

SAYER, R.; MARIÉS, A.; SINGH, C. Advanced students' and faculty members' reasoning about the double slit experiment with single particles. En **Proceedings of the Physics Education Research Conference PERC** p. 460-465, 2020.

SINGH, C.; MARSHMAN, E. Review of student difficulties in upper-level quantum mechanics. **Physical Review Special Topics-Physics Education Research**, vol. 11, no 2, p. 020117, 2015.

STADERMANN, H. K. E.; VAN DEN BERG, E.; GOEDHART, M. J. Analysis of secondary school quantum physics curricula of 15 different countries: Different perspectives on a challenging topic. **Physical Review Physics Education Research**, vol. 15, no 1, p. 010130, 2019.

Recebido em: 20/01/2023

Aceito em: 20/03/2023

TONOMURA, A., et al. Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern, **American Journal of Physics**, vol. 57, no 2, p. 117-120, 1989.

VARELLA, R. A importância da abordagem histórica e epistemológica no ensino científico como contraponto à uma visão de Ciência como saber definitivo. **Revista Insignare Scientia - RIS**, v. 5, n. 4, p. 387-399, 21 dez. 2022.

Recebido em: 20/01/2023

Aceito em: 20/03/2023