RIS
Revista Insignare Scientia
Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

O pensamento algébrico de estudantes do 5º do ensino fundamental: uma análise a partir das camadas de generalidade de Luis Radford

The algebraic thinking of 5th grade students: an analysis based on Luis Radford's layers of generality

El pensamiento algebraico de estudiantes de 5to grado: un análisis basado en las capas de generalidad de Luis Radford

Jéssica Goulart da Silva (jessicagoulartdasilva@gmail.com, Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Brasil), **Orcid:** https://orcid.org/0000-0002-0239-8812

Ricardo Fajardo (rfaj@ufsm.br, Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Brasil), **Orcid:** https://orcid.org/0000-0002-9416-713X

Resumo

Nesta produção visa-se apresentar alguns resultados de uma pesquisa de mestrado cujo objetivo foi analisar as aprendizagens algébricas evidenciadas em episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5.º ano do Ensino Fundamental, a partir de camadas de generalidade do pensamento algébrico da Teoria da Objetivação. Assim, analisou-se em episódios de trabalho conjunto as aprendizagens algébricas dos estudantes, seguindo os movimentos recursivos da Análise Textual Discursiva. Elencou-se como categorias de análise das aprendizagens algébricas as seguintes: Pensamento Algébrico Factual; Pensamento Algébrico Contextual; e Pensamento Algébrico Padrão. Diante disso, como resultados, identificou-se que indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual e camada contextual de compreensão. Cabe destacar que a regularidade das sequências é mais facilmente objetivada pelos estudantes, no entanto, em alguns episódios foi possível identificar a relação covariacional das sequências. Portanto, haja vista que é possível identificar indícios de aprendizagem algébrica, sugere-se que pesquisas futuras versem sobre as possibilidades de intervenções dos professores nesse trabalho conjunto de modo favorecer o encontro dos estudantes com formas de saber algébrico.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de Álgebra; Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Pensamento Algébrico Covariacional; Trabalho conjunto.

Abstract

This production aims to present some results of a master's degree research whose objective was to analyze the algebraic learning evidenced in episodes of joint work with students from the 5th year of Elementary School, based on general layers of algebraic thinking from the Theory of Objectivation. Thus, the students' algebraic learning was analyzed in episodes of joint work, following the recursive movements of Discursive Textual Analysis. The following categories of analysis of algebraic learning were listed: Factual Algebraic Thinking; Contextual Algebraic Thinking; and Algebraic Thinking.

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

Given this, as a result, it was identified that signs of algebraic learning in its factual layer and contextual layer of understanding. It is worth noting that the regularity of the sequences is more easily objectified by students, however, in some episodes it was possible to identify the covariational relationship of the sequences. Therefore, given that it is possible to identify signs of algebraic learning, it is suggested that future research looks at the possibilities of teacher interventions in this joint work in order to encourage students to encounter forms of algebraic knowledge.

Keywords: Teaching-learning Algebra; Early Years of Elementary School; Covariational Algebraic Thinking; Joint work.

Resumen
Esta producción tiene como objetivo presentar algunos resultados de una investigación de maestría cuyo objetivo fue analizar el aprendizaje algebraico evidenciado en episodios de trabajo conjunto con estudiantes de 5° año de Educación Primaria, a partir de estratos generales del pensamiento algebraico desde la Teoría de la Objetivación. Así, el aprendizaje algebraico de los estudiantes fue analizado en episodios de trabajo conjunto, siguiendo los movimientos recursivos del Análisis Textual Discursivo. Se enumeraron las siguientes categorías de análisis del aprendizaje algebraico: Pensamiento Algebraico Fáctico; Pensamiento Algebraico Contextual; y Pensamiento Algebraico. Ante esto, como resultado, se identificó que los signos del aprendizaje algebraico se encuentran en su capa fáctica y capa contextual de comprensión. Cabe señalar que la regularidad de las secuencias es objetivada más fácilmente por los estudiantes, sin embargo, en algunos episodios fue posible identificar la relación covariacional de las secuencias. Por lo tanto, dado que es posible identificar signos de aprendizaje algebraico, se sugiere que futuras investigaciones analicen las posibilidades de intervención docente en este trabajo conjunto con el fin de incentivar a los estudiantes a encontrar formas de conocimiento algebraico.

Palabras-clave: Enseñanza-aprendizaje de Álgebra; Primeros Años de Escuela Primaria; Pensamiento Algebraico Covariacional; Trabajo conjunto.

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais (AI) do Ensino Fundamental (EF) tem sido foco de pesquisas em Educação Matemática. Assim, visando compreender essa temática ao longo do mestrado da primeira autora, sob a orientação do segundo autor algumas dessas pesquisas foram identificadas e compreendidas conforme é destacado, a seguir.

Ao longo do processo de compreensão acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico nos AI do EF, identificamos as seguintes pesquisas sobre essa temática:

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

Canavarro (2007), Cyrino e Oliveira (2011), Branco (2013), Boni (2014), Fernandes (2014), Martins (2015) e Ferreira (2017).

Assim, ao inter-relacionar essas pesquisas, constatou-se que a maioria delas, cinco das sete pesquisas, trata da proposição de tarefas que exigem o pensamento algébrico de estudantes (Boni, 2014; Fernandes, 2014; Martins, 2015; Canavarro, 2007; Cyrino E Oliveira, 2011). Outra semelhança está no referencial teórico, pois seis das sete pesquisas têm como principal referência do pensamento algébrico as ideias de James Kaput (Boni, 2014; Fernandes, 2014; Ferreira, 2017, Canavarro, 2007, Cyrino E Oliveira, 2011, Branco, 2013), tendo somente uma pesquisa que considera a concepção de pensamento algébrico de Luis Radford (Boni, 2014).

Diante desse cenário, é destacado a existência de diferentes aportes teóricos do pensamento algébrico, conforme afirmam Almeida e Santos (2017), as caracterizações do pensamento algébrico de James Kaput e Luis Radford são importantes, porém divergentes em muitos aspectos.

Segundo consta em Kaput (2008), o pensamento algébrico é uma atividade exclusivamente humana oriunda de generalizações que resultam de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais formal. Blanton e Kaput (2005) trazem três vertentes do pensamento algébrico, que são a aritmética generalizada, o pensamento funcional e a modelação. De acordo com Kaput (2008), a generalização pode ser expressa pela linguagem verbal (oral e escrita) – língua natural, numérica, simbólica e algébrica, dentre outras.

Radford (2006, p. 2), por sua vez, compreende pensamento algébrico sob a ótica da Teoria da Objetivação (TO), de sua autoria, e o considera como uma “[...] forma particular de refletir matematicamente [...]”. O autor concebe a aprendizagem de Álgebra como uma tomada de consciência de objetos algébricos e sistemas de pensamento algébrico, o que ocorre dentro de um processo coletivo (trabalho conjunto) de reflexão. Assim, conforme Radford (2009), para levar os estudantes ao encontro de formas de pensamento algébrico – aprendizagem algébrica –, é necessário compreender que esse pensamento apresenta diferentes sedimentações conceituais de diversas camadas de generalidade, a saber: Pensamento Algébrico Factual, Pensamento Algébrico Contextual e Pensamento Algébrico Padrão.

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

Ambos os autores têm semelhante compreensão da aprendizagem algébrica e consideram a generalização como elemento central, ao caracterizarem o pensamento algébrico. James Kaput a compreende a partir de vertentes do pensamento algébrico, enquanto Luis Radford o faz a partir de camadas de generalidade. No entanto, somente Luis Radford apresenta a linguagem não verbal (gestual) como forma de expressar a generalização. Assim, tendo em vista os sujeitos da pesquisa, julgou-se mais promissor considerar a ótica da TO de Luis Radford, com vistas a ampliar as discussões acerca da temática do pensamento algébrico dos AI do EF. E, a partir dessas constatações emergiu a questão de pesquisa: se indícios de aprendizagem algébrica ocorrem, como são evidenciados por estudantes do 5.º ano do EF em episódios de trabalho conjunto que abrange o pensamento algébrico covariacional, adaptados segundo a TO de Luis Radford?

Consequentemente, no presente artigo, de forma geral, objetiva-se apresentar alguns resultados da pesquisa de mestrado. De forma específica, trazer uma análise das aprendizagens algébricas evidenciadas em episódios de trabalho conjunto com um trio de estudantes do 5.º ano do EF, a partir das camadas de generalidade de Radford.

O PENSAMENTO ALGÉBRICO SOB A ÓTICA DA TO: ALGUMAS COMPREENSÕES

A TO é uma teoria semiótica-cultural de ensino e aprendizagem de Matemática que tem inspiração na etnomatemática de D'Ambrósio, na escola de pensamento histórico-cultural de Vygotsky, na epistemologia de Ilyenkov e na fenomenologia de Husserl (Radford, 2011). Tem por objetivo explicar os processos de encontro dos estudantes com formas culturais de pensamento matemático, enquanto processos coletivos de reflexão (Ibid.).

A natureza mediada do pensamento matemático refere-se ao fato da TO compreender os artefatos – objetos feitos por seres humanos, itens de interesse cultural ou histórico – "como parte constitutiva e consubstancial do pensamento, uma vez que pensamos com e por meio de artefatos culturais" (Radford, 2011, p. 316).

Convém considerar que o pensamento matemático não é meramente gerado ao longo do trabalho humano, pois as formas de trabalho dos indivíduos imprimem sua marca no pensamento e modificam o saber, principalmente no decorrer da evolução social

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

do ser humano que se torna mais complexa. Essas formas que o trabalho conjunto assume dependem dos Sistemas Semióticos de Significação Culturais (SSSC), definidos em Radford (2018a) como superestruturas simbólicas dinâmicas, que engloba concepções culturais sobre o mundo e os indivíduos. De maneira mais específica, os SSSC abarcam ideias sobre coisas no mundo (por exemplo, a natureza dos objetos matemáticos e seu modo de existir), sobre a verdade (por exemplo, como a verdade é e pode ser estabelecida), sobre os indivíduos, os métodos de pesquisa e os meios legítimos de representação do conhecimento, o que se constitui como "matéria-prima" cultural a partir da qual os sujeitos desenham as ideias do que eles são, de suas subjetividades. Por isso, da interação entre os SSSC, o trabalho conjunto e os artefatos, são gerados novas formas de trabalho e modos de conhecer, com base na dimensão histórica específica.

No contexto escolar, para Radford (2011), em aulas de Matemática, as tarefas são um meio de atingir a *praxis cogitans*, ou seja, a reflexão cultural denominada como "saber matemático". Tais saberes são compostos por camadas de generalidade. O pensamento algébrico, que é um saber matemático, tem as seguintes camadas de generalidade (Radford, 2009): Pensamento Algébrico Factual, Pensamento Algébrico Contextual e Pensamento Algébrico Padrão, que são apresentadas a seguir.

Para apresentar as camadas de generalidade do pensamento algébrico propostas por Luis Radford, aborda-se as interpretações dos autores desse artigo acerca das camadas de generalidade propostas por Radford (2009) em um exemplo de sala de aula nos AI do ~~E~~ EF abordado em Radford (2021).

O exemplo escolhido em Radford (2021) abrange uma situação da professora Giroux e sua turma *Grade* 4 (9 a 10 anos) trabalhando em conjunto para resolução de uma tarefa que abrange o pensamento algébrico Covariacional, ou seja, abrange duas grandezas variáveis que se relacionam entre si. Essa tarefa, em sua primeira parte, tem o seguinte enunciado.

> Em seu aniversário, Marc recebe um cofrinho com forma de porquinho com um dólar. Ele poupa 2 dólares por semana. No final da primeira semana tem 3 dólares, no final da segunda semana tem 5 dólares, e assim por diante. (Radford, 2021, p. 22)

E, segundo Radford (2021) para sua compreensão/resolução a professora Giroux distribui aos alunos fichas de duas cores (azul e vermelha) e copos numerados destinados

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

RIS
Revista Insignare Scientia
Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

a representar as semanas. Assim, inicialmente ela propõe que eles calculem o processo de poupança até a semana 5 com as fichas. Após ela propõe que desenhando na lousa eles encontrem o total poupado no final das semanas 10, 15 e 25. Por fim, sugere escrever uma mensagem indicando como sempre descobrir o valor poupado em qualquer semana.

Segundo Radford (2009), a camada de Pensamento Algébrico Factual envolve pensar algebricamente a indeterminação, o desconhecido (a incógnita), mas de maneira implícita. Gestos e palavras constituem a essência semiótica dos estudantes. Assim, compreende-se que quando os estudantes conseguem responder a primeira parte da tarefa, ou seja, conseguem representar o processo de poupança até a semana 5, pois percebem que já havia um real no cofre e sempre é poupado 2 dólares por semana. E, após a percepção da regularidade conseguem determinar as semanas 10, 15 e 25. No entanto, essa identificação, como estipula Radford (2009), não garante a generalização.

Por sua vez, na camada de Pensamento Algébrico Contextual, a tarefa exige que os alunos se aventurem além de imagens particulares e lidem com um novo objeto (Radford, 2009): uma figura geral. Desse modo, quando a indeterminação se torna parte do discurso explícito da camada de pensamento algébrico, e os alunos são capazes de responder a segunda parte da tarefa, ou seja, construir uma mensagem (fórmula) que possa ser utilizada para calcular a quantia de qualquer semana, ainda que essa mensagem esteja na forma de palavras escritas não simbólicas compreendemos que eles estejam em uma camada contextual de pensamento algébrico.

Na sequência, considerando a camada de Pensamento Algébrico Padrão, conforme abordado em Radford (2009), há uma mudança drástica no modo de designação dos objetos, passando a designá-los por sinais alfanuméricos. Tendo em vista, que o trabalho conjunto escolhido para exemplificar as camadas foi realizado com estudantes do *Grade 4* não se espera um desenvolvimento nessa camada do pensamento algébrico. Porém, em níveis de ensino mais elevados o estudante conseguirá escrever uma fórmula para representar quantidade de dinheiro na semana n, da seguinte forma: $2n + 1$). Esta expressão é mais evoluída do que a utilizada pelo estudante que se encontra na camada de pensamento algébrico contextual, uma vez que agora a linguagem tem maior poder de síntese – a linguagem simbólica algébrica, baseada em sinais alfanuméricos.

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

Convém destacar que, para Radford (2018b), as abordagens ‘recorrente’ e ‘global’ são predominantes no *Grade* 4. A primeira abordagem é baseada na percepção da relação recorrente entre termos consecutivos e a segunda abordagem vai além do explicitamente indicado no problema, lida com a expressão de um relacionamento matemático entre duas variáveis por exemplo: o número do dia e as principais partes visuais do termo.

Assim, tendo apresentado a teoria de Radford, na seção seguinte abordar-se os procedimentos metodológicos da pesquisa.

CAMINHO METODOLÓGICO

A pesquisa é de natureza qualitativa, com dados predominantemente interpretativos, descritivos e com ênfase no significado, conforme Bogdan e Biklen (1994). Dessa maneira, segundo esses autores, ela é naturalista ou de campo, pois abrange a produção de dados no território dos sujeitos da pesquisa, que nesse caso envolveu a produção de dados com nove estudantes do 5.º ano do EF em sala de aula, numa escola pública do município de Itaqui-RS[1].

O movimento metodológico inicial da pesquisa implica a constituição do *corpus*, que consiste na seleção dos dados a serem analisados, de acordo com Moraes e Galiazzi (2016). Assim, os dados produzidos, são episódios de trabalho conjunto constituídos pelas produções verbais - orais e escritas -, assim como produções não verbais, gestuais, dos estudantes, bem como da pesquisadora, primeira autora, ao resolverem tarefas que visavam ao pensamento algébrico covariacional.

Portanto, a produção de dados abrangeu: seleção e adaptação de tarefas; desenvolvimento do trabalho conjunto; instrumento de produção de dados; transcrição e constituição de episódios de trabalho conjunto, descritos a seguir.

As tarefas foram selecionadas ao longo da constituição do referencial teórico. O foco foi em tarefas envolvendo a generalização de sequências, cuja abordagem enfoca a covariação, uma vez que, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017), essa ideia deve ser abordada desde o 5.º ano do EF.

[1] A escola escolhida é o local de trabalho da primeira autora. Além disso, optou-se pela única turma do 5º ano que havia no turno da tarde. Pois a primeira autora trabalhava no turno da manhã.

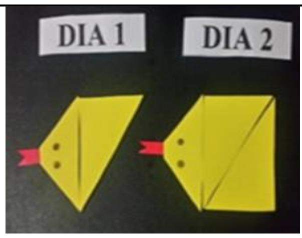
Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

RIS Revista Insignare Scientia
Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

Após essa seleção, os enunciados foram adaptados, considerando os propósitos da pesquisa e a estrutura de tarefas proposta por Radford (2015), que abrange sua organização em sequência e sua abordagem com o uso de artefatos.

Ao todo foram desenvolvidas com os estudantes cinco tarefas, porém, abordou-se apenas 3 tarefas que se conseguiu maiores resultados. Assim, no Quadro 1, a seguir, os enunciados adaptados para a pesquisa, dessas 3 tarefas que são utilizadas e os artefatos produzidos e o material utilizado na produção, apenas menciona-se as demais tarefas para manter a codificação da pesquisa.

Quadro 1 – Enunciado das tarefas, artefatos e adaptações

Tarefas	Enunciados adaptados[2]	Artefatos produzidos / Material de produção
Tarefa-1 (Ta1)	Para seu aniversário, Carlos recebeu um cofrinho com R$ 1,00 dentro. Ele deposita no cofrinho R$ 2,00 por semana. No final da primeira semana, ele tem R$ 3,00. No final da segunda semana, ele tem R$ 5,00, e assim por diante. a) No final da semana 4, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? b) No final da semana 5, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? c) No final da semana 10, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? d) No final da semana 15, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? e) No final da semana 25, quanto ele tem depositado no cofrinho? Como você descobriu? f) Apresente uma forma de sempre saber o valor em R$ no cofrinho a cada semana.	 / *Papel Cartão; *Folha branca; *Cartolina verde e azul; *Caneta hidrográfica preta.
Tarefa-2 (Ta2)	O problema dos cães e caudas	
Tarefa-3 (Ta3)	Uma cobra está em fase de crescimento; no dia 1, ela tem 2 partes do seu corpo formadas; no dia 2, ela tem 3 partes do corpo formadas; no dia 3, ela tem 4 partes do corpo formadas. a) No dia 4, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? b) No dia 5, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? c) No dia 6, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? d) No dia 10, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? e) No dia 15, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? f) No dia 25, ela terá quantas partes formadas? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber o número de partes formadas.	 / *EV A amarelo; *Folha branca; *Cartolina vermelha; *Caneta hidrográfica preta.

[2] Algumas tarefas não têm seu enunciado, pois são muito extensos.

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

RIS
Revista Insignare Scientia
Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

Tarefa-4 (Ta4)	Suponha que você tenha uma corda e queira cortá-la em pedaços iguais. a) Se você fizer 1 corte na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? b) Se você fizer 2 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? c) Se você fizer 3 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? d) Se você fizer 4 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? e) Se você fizer 15 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? f) Se você fizer 25 cortes na corda, quantos pedaços terá? Como você descobriu? g) Apresente uma forma de sempre saber quantos pedaços de corda terá.	 / *Folha sulfite A4; *Linha rosa.
Tarefa-5 (Ta5)	O problema das mesas e das cadeiras.	

Fonte: Silva (2019, p. 60)

Após foram definidos as tarefas e os artefatos, se estabeleceu o modo de encaminhamento delas no trabalho conjunto em sala de aula, adaptado de Radford (2015), a saber: 1.º) o primeiro momento foi o de apresentação da tarefa e dos artefatos aos estudantes pela pesquisadora; 2.º) os estudantes trabalharam em trio. 3º) Depois, a pesquisadora visitou o trio, fazendo questionamentos e intervenções aos estudantes. 4.º) Por fim, a pesquisadora convidou cada trio para uma discussão geral, em que eles expuseram suas ideias, conforme ilustrado na Figura 1, a seguir.

Fonte: Adaptado de Radford (2015, p. 556).

Figura 1 – Trabalho conjunto na sua implementação em sala de aula

Na continuação, determinou-se a forma como os dados seriam capturados. Então, a fim de constituir os episódios de trabalho conjunto, se utilizou os seguintes instrumentos de produção de dados: 1) gravação de áudio e vídeo dos grupos compostos de três estudantes em sala de aula; 2) folha de tarefa do estudante, com respostas às tarefas; 3) notas de campo – comentários escritos pela pesquisadora após a aula sobre o que

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

RIS Revista Insignare Scientia
Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

aconteceu com os estudantes e sobre os entendimentos matemáticos percebidos, que foram também considerados por Radford (2015), conforme a Figura 2.

Fonte: Adaptado de Silva (2019, p. 64)

Figura 2 – Produção de dados

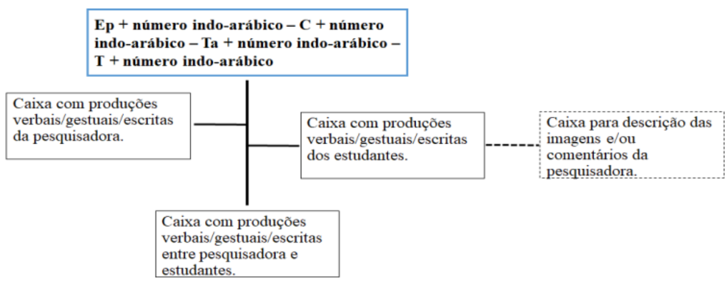
Para a análise de dados, inicialmente, realizou-se as transcrições na íntegra. Posteriormente, elas foram retomadas, juntamente com as gravações de áudio e vídeo, buscando "[...] recortes da aula que são representativos do fenômeno investigado" (Carvalho, 2011, p. 33), constituindo-se em episódios de trabalho conjunto. Dessa forma, inicialmente, foi realizada a transcrição fiel – em que se utilizou as codificações que constam no Quadro 2 – da linguagem oral e gestual, bem como de ações realizadas durante a aula.

Quadro 2 – Demais codificações para a pesquisa

Codificação	Significado
Ep + número indo-arábico	Para se referir aos episódios. Por exemplo: Ep1 para indicar Episódio 1.
C + número indo-arábico	Para se referir às cenas. Por exemplo: C1 para indicar Cena 1.
E + número indo-arábico	Para se referir aos estudantes de forma individual. Por exemplo: E1 para indicar o Estudante 1.
T + número indo-arábico	Para se referir aos estudantes de forma coletiva. Por exemplo: T1 para indicar Trio 1.
P	Para se referir à pesquisadora ~~(primeira autora)~~

Fonte: Silva (2019, p. 66)

Conforme o quadro 2, subdividiu-se esses episódios em cenas (trechos dos episódios). Na Figura 3, é exposto a forma de organização dos episódios de trabalho conjunto na pesquisa.



Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

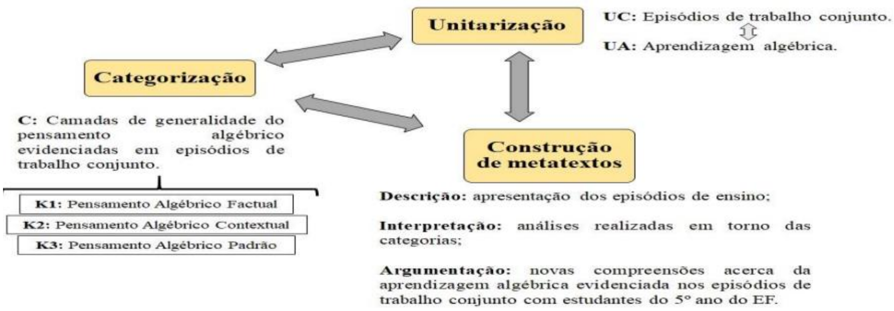
Fonte: Adaptado de Silva (2019, p. 67)

Figura 3 – Organização dos episódios de trabalho conjunto

Na figura 3, as produções gestuais são descritas e ilustradas. Além disso, as produções verbais e não verbais da pesquisadora estão à esquerda, as produções verbais e não verbais dos estudantes encontram-se à direita, e as produções entre ambos estão na caixa do meio. Cabe destacar que as descrições das imagens, bem como os seus comentários, estão em caixas com o contorno pontilhado.

Uma vez definido o *corpus* da pesquisa, iniciou-se o ciclo da análise, conforme a Análise Textual Discursiva (ATD) de Moraes e Galiazzi (2016), em três movimentos recursivos, a saber: a "unitarização", a "categorização" e a "construção de metatextos".

Assim, traz-se o diagrama dos movimentos da ATD, ilustrado na Figura 4, a seguir.



Fonte: Silva (2019, p. 69)

Figura 4 – Diagrama da ATD nesta pesquisa

A "unitarização" é o movimento inicial da análise e consiste no recorte de textos, a partir da discriminação de unidades base, as quais podem ser Unidades de Contexto (UC), que são fragmentos amplos de textos que delimitam o contexto de análise, e Unidades de Análise (UA), que são elementos discriminantes de sentidos ou significado da pesquisa e buscam representar aspectos significativos do fenômeno analisado. Nessa pesquisa se definiu como unidades os Episódios de trabalho conjunto (UC) e a Aprendizagem algébrica (UA).

O movimento posterior, a "categorização", abrange construir relações entre as unidades anteriormente mencionadas, combinando-as, constituindo categorias e

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

subcategorias. A partir do estabelecimento de relações entre UC e UA definidas nesta pesquisa, elencou-se a seguinte categoria (C) definida *a priori*: Camadas de generalidade do pensamento algébrico evidenciadas em episódios de trabalho conjunto. Esta categoria tem como subcategorias: Pensamento Algébrico Factual (K1); Pensamento Algébrico Contextual (K2); e Pensamento Algébrico Padrão (K3).

O movimento de "construção de metatextos" abrange a descrição, a interpretação e a argumentação sobre o fenômeno investigado. A descrição expressa os sentidos e significados construídos, e nesta pesquisa envolve a apresentação dos episódios de trabalho conjunto. Por sua vez, a interpretação apresenta as relações, as inferências e os entendimentos estabelecidos pelo pesquisador – nesta pesquisa abrange as análises a partir das subcategorias definidas *a priori*. Por fim, a argumentação busca níveis mais aprofundados de compreensão do fenômeno investigado – neste estudo abarca outras compreensões da aprendizagem algébrica evidenciadas nos episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5.º ano do EF.

Na seção seguinte aborda-se alguns dos resultados oriundos das análises realizadas nessa pesquisa.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, apresenta-se uma síntese dos resultados evidenciados na pesquisa: a análise de episódios de trabalho conjunto que ocorreu com o trio 1 (T1), com compreensões gerais acerca deste trabalho. Portanto, no Quadro 3 são apresentados os episódios de trabalho conjunto organizados por subcategorias.

Quadro 3 – Episódios de trabalho conjunto organizados por subcategorias de análise

	T1	
	K1	***K2***
Ta1	Ep1-C1-Ta1-T1; Ep1-C2-Ta1-T1; Ep1-C3-Ta1-T1; Ep1-C4-Ta1-T1 e Ep1-C5-Ta1-T1.	Não identificamos indícios de aprendizagem algébrica em uma camada contextual
Ta2	Ep3-C1-Ta2-T1.	Ep3-C2-Ta1-T1; Ep3-C3-Ta1-T1 e Ep3-C4-Ta1-T1.
Ta3	Ep5-C1-Ta3-T1.	Ep5-C2-Ta3-T1; Ep5-C3-Ta3-T1 e Ep5-C4-Ta3-T1.
Ta4	Ep7-C1-Ta4-T1.	Ep7-C2-Ta4-T1.
Ta5	Ep9-C1-Ta5-T1 e Ep9-C2-Ta5-T1.	Ep9-C3-Ta5-T1.

Fonte: Adaptado de Silva (2019, p. 118)

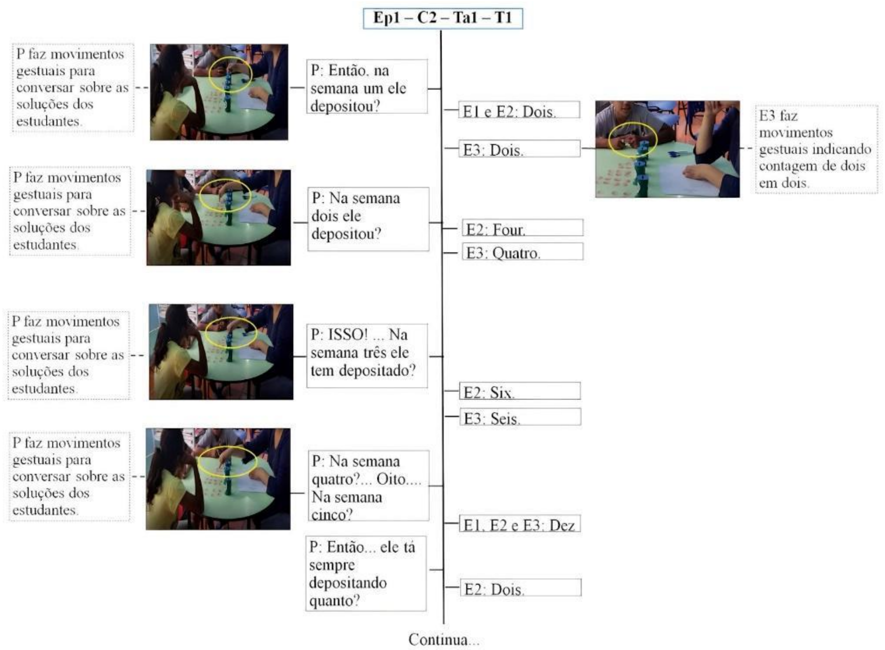
Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

Diante do exposto no Quadro 3, no trabalho conjunto como T1 em torno da Ta1, identificou-se apenas indícios de aprendizagem algébrica em sua camada factual. A partir da Ta2, se evidencia indícios tanto de aprendizagem algébrica factual quanto de aprendizagem algébrica contextual. Em síntese, os estudantes revelam transitar entre a camada factual e a contextual. Visando ilustrar e discutir esses resultados, traz-se alguns episódios de trabalho conjunto, nas subseções seguintes.

Indícios de aprendizagem algébrica factual: alguns episódios de trabalho conjunto

Conforme anteriormente explicitado, os estudantes (E1; E2; E3) do T1 revelaram indícios de aprendizagem factual ao longo do trabalho conjunto realizado em torno das cinco tarefas (Ta1; Ta2; Ta3; Ta4; e Ta5). Em especial, ao longo da Ta1 estes apresentaram apenas indícios de aprendizagem factual; algo que já era esperado, considerando que a Ta1 marcou o início do trabalho conjunto com esses estudantes.

Assim, nas Figura 5 e 6, a seguir, apresenta-se alguns episódios que evidenciam indícios de aprendizagem algébrica no trabalho conjunto com os estudantes.



Fonte: Silva (2019, p. 74)

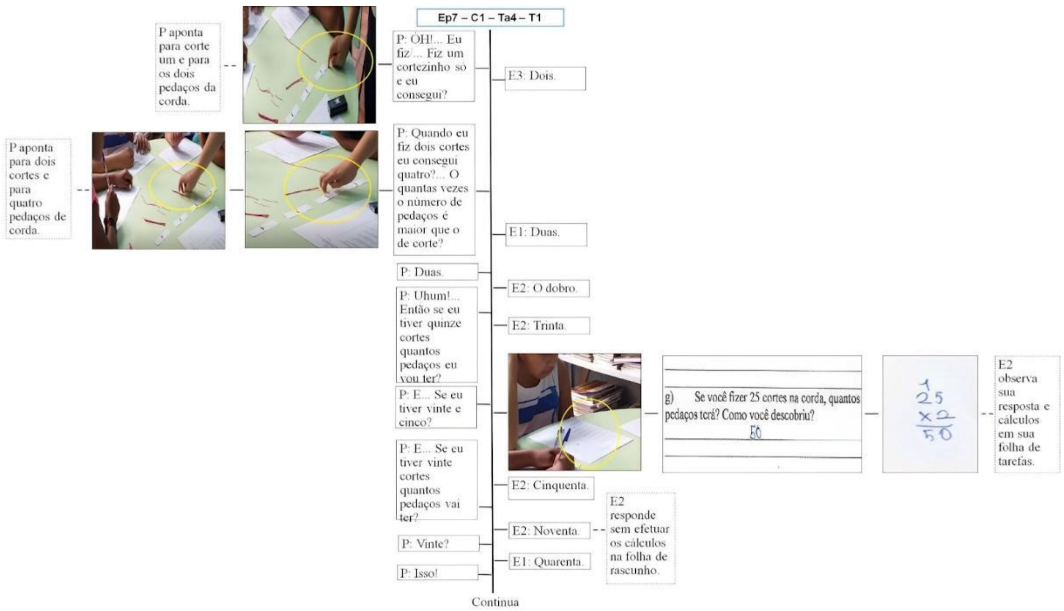
Figura 5 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T1 na Ta1

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

RIS Revista Insignare Scientia
Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

A Figura 5 ilustra o momento em que P, tentando trazer à tona a covariação entre as semanas e o número de moedas, realiza movimentos gestuais, apontando para o cofrinho 1 (semana 1) e as moedas que estão à sua frente; o cofrinho 2 (semana 2) e as moedas que estão à sua frente, e assim por diante, até o cofrinho 5 (semana 5). E3 realiza movimentos gestuais, evidenciando contagem 2 a 2, o que indica que está focado na regularidade do número de moedas. Essa discussão foi encerrada, abordando essa regularidade e, assim, mantendo uma abordagem recorrente (Radford, 2018b).

Conforme já exposto, apesar dos estudantes terem dificuldade em objetivar a covariação no desenvolvimento da Ta1 ao longo da realização das demais tarefas (Ta2; Ta3; Ta4; e Ta5) foi possível identificar em vários episódios de trabalho conjunto indícios de aprendizagem algébrica covariacional. Ou seja, a relação covariacional é objetivada mais facilmente do que na Ta1 e isso pode estar relacionado com a pouca experiência dos estudantes com tarefas que enfocam a covariação. No entanto, as variáveis permaneçam implícitas, conforme ilustrado na Figura 6.



Fonte: Silva (2019, p. 90)

Figura 6 – Cena 1 de trabalho conjunto com o T1 na Ta4

A Figura 6 apresenta o momento em que P questiona os estudantes a respeito do número de pedaços que haverá, se forem feitos 2 e 15 cortes na corda. Após esse questionamento, tentando trazer à tona a relação covariacional entre número de cortes e número de pedaços, P, com o auxílio dos artefatos (corda e placa), indaga os estudantes

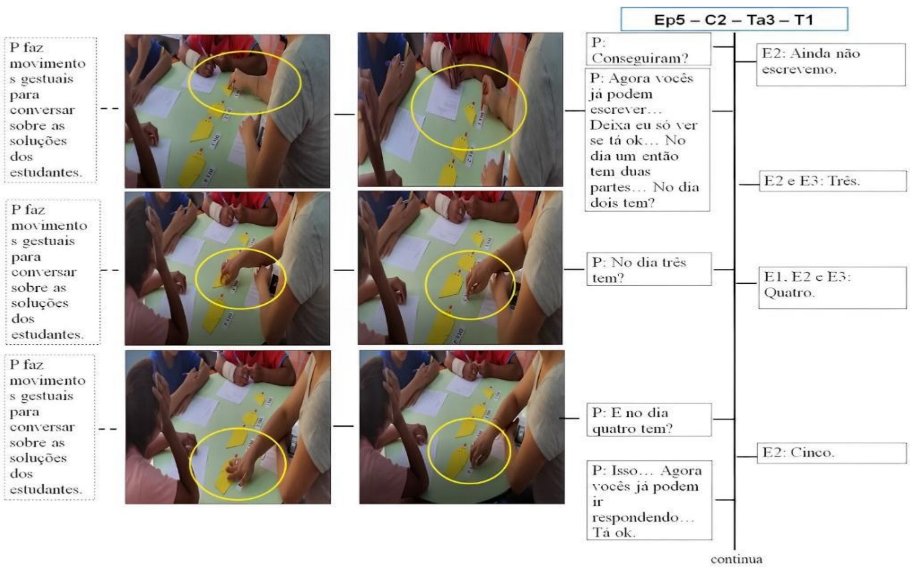
Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

RIS Revista Insignare Scientia
Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

acerca de quantas vezes o número de pedaços é maior do que o número de cortes; e obtém respostas como "Duas" (E1) e "O dobro" (E2). Ao observar as respostas do item g (25 cortes), é possível perceber que E2 utiliza a ideia de dobro para encontrar a resposta, que é "Cinquenta" (pedaços). Após, P questiona o T1 sobre o número de pedaços, se forem 20 cortes. Apesar de E2 responder equivocadamente, talvez por ter feito os cálculos mentalmente, sem ter organizado o algoritmo, E1 responde acertadamente "Quarenta". A partir disso, compreendemos que os estudantes perceberam a relação covariacional existente entre o número de pedaços e o número de cortes, pois o número de pedaços é o dobro do número de cortes. No entanto, ela permanece implícita na oralidade dos estudantes. Somente P aborda em sua oralidade e gestual as variáveis envolvidas; o T1 foca em termos específicos da sequência (Radford, 2018b) – nesse caso, foi de 25 (cortes).

Indícios de aprendizagem algébrica contextual: alguns episódios de trabalho conjunto

Conforme exposto anteriormente, é possível perceber indícios de aprendizagem algébrica em sua camada contextual (K2), evidenciados pelos estudantes que compõem o T1, ao desenvolverem tarefas selecionadas para essa pesquisa, exceto na Ta1. Ou seja, ao longo das discussões entre P e os trios a partir dos artefatos na mesa, tanto as variáveis quanto a relação covariacional entre elas vêm à tona, e os estudantes passam a abordá-la em sua produção verbal oral e escrita, para além da gestual, ilustrado nas Figuras 7 e 8.



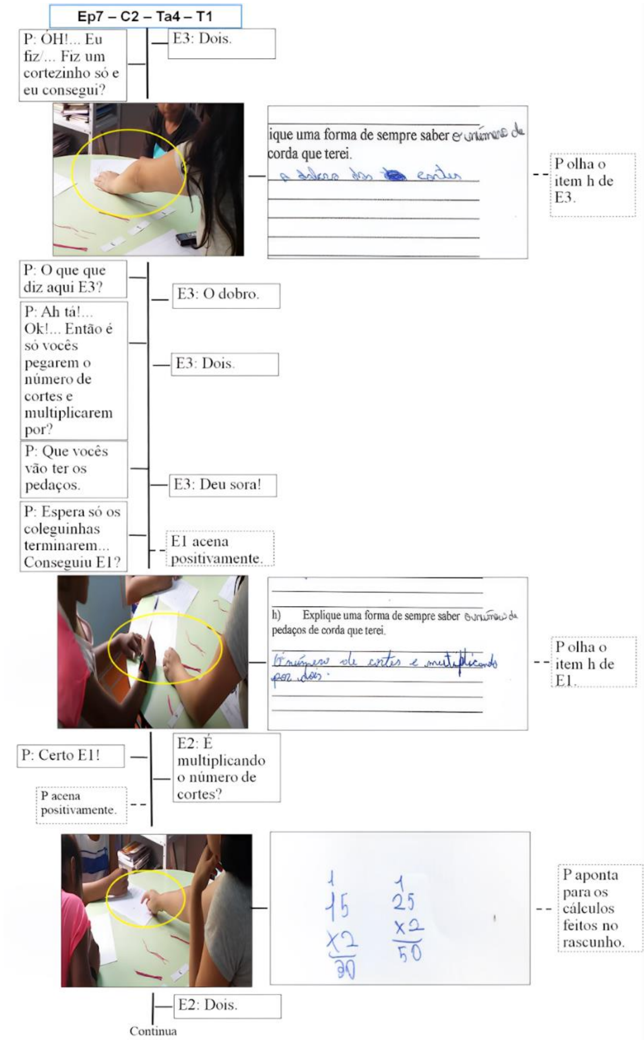
Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

Vol. 7, n. 1. Jan./Abr. 2024
ISSN: 2595- 4520

Fonte: Silva (2019, p. 109)

Figura 7 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T1 na Ta3

Conforme expõe a Figura 7, apesar de E2 e E3 terem conseguido compreender e responder o número de partes da cobra geométrica até o dia 4. Então, P retoma as discussões sobre a Ta3, realizando movimentos gestuais e apontando para os artefatos (placa e partes da cobra geométrica), até que E2 participa das discussões e demonstra, em sua produção verbal (oral), sua percepção da covariação, indicando que "é mais um que o dia". Diante disso, compreende-se que há uma tomada de consciência da ideia covariacional (Radford, 2009) por parte de E2, a partir da discussão entre P e o T2 acerca da dúvida de E1.



Fonte: Silva (2019, p. 113)

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

Figura 8 – Cena 2 de trabalho conjunto com o T1 na Ta4

Como se verifica na Figura 8, as discussões desse episódio envolveram o item h, “Explique uma forma de sempre saber o número de pedaços da corda que terei”. P observa a resposta ao item h de E3, que é “o dobro dos cortes”. Após a discussão com E3 sobre sua resposta, P observa a resposta ao item h de E2, que é: “O número de cortes é multiplicado por dois”. Diante disso, percebe-se que os estudantes têm maior facilidade de trazer à tona as variáveis envolvidas na tarefa; além disso, conseguem estabelecer a relação covariacional entre elas em sua produção verbal escrita e oral, de certa forma percebemos uma certa evolução nas compreensões acerca das variáveis envolvidas.

Diante desses resultados, na seção seguinte, traz-se as considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta produção visa-se apresentar a análise das aprendizagens algébricas evidenciadas em episódios de trabalho conjunto com estudantes do 5.º ano do EF, a partir da categoria Camadas de generalidade do pensamento algébrico evidenciadas em episódios de trabalho conjunto, com subcategorias: Pensamento Algébrico Factual (K1); Pensamento Algébrico Contextual (K2); e Pensamento Algébrico Padrão (K3).

A partir das análises realizadas, compreende-se que há indícios de aprendizagem algébrica dos estudantes no trabalho conjunto, na K1, na K2, e nenhum indício na K3, propostas por Radford (2009). Embora na Ta1 esses estudantes tivessem revelado apenas a K1, ao longo do trabalho conjunto em torno das demais tarefas (Ta2; Ta3; T4; e Ta5) eles apresentaram indícios da K2.

É relevante notar que a regularidade das sequências é mais facilmente objetivada pelos estudantes, uma vez que há a utilização da estratégia de recorrência entre os termos consecutivos (Radford, 2018b). Por exemplo, na Ta1, utilizando a ideia de adicionar dois ao próximo termo da sequência, eles conseguem saber o número de moedas da semana seguinte, ou seja, se na semana um tem três reais, na semana dois, terá cinco reais, e assim por diante. Ao longo do trabalho conjunto, a relação Covariacional das sequências vem à tona, ainda que em um primeiro momento de forma implícita, uma vez que há a utilização da estratégia global. Por exemplo, na Ta4, utilizando a ideia de dobro, mesmo que

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

inicialmente não tratem de forma explícita as variáveis envolvidas, eles conseguem saber qual o número de partes quando forem feitos 15 e 25 cortes na corda. Por fim, em um nível contextual, eles conseguem, por meio de produções verbais, estabelecer a relação Covariacional com as variáveis explícitas, ainda que não em linguagem algébrica. Por exemplo, na Ta3 estabelecem que o número de partes da cobra é sempre o número de dias adicionado ~~de~~ um".

Portanto, para futuras pesquisas, sugerem-se duas possibilidades de encaminhamentos: 1.ª) aprofundar as compreensões acerca do trabalho conjunto com os estudantes, pois, conforme Radford (2014), os sujeitos não reconhecem tão facilmente formas algébricas em um curto espaço de tempo. Talvez com mais tarefas desenvolvidas, com um espaço de tempo maior, tenha-se mais elementos e possibilidades de discussão; 2.ª) investigar acerca das diferentes possibilidades de intervenção do professor/pesquisador no trabalho conjunto, com vistas à emergência do pensamento algébrico covariacional, tanto no âmbito da Educação Básica quanto no âmbito da Educação Superior, haja vista que, conforme Radford (2015), na TO, nas relações de ensino-aprendizagem, as intervenções do professor tem um papel relevante. Em especial, é importante investigar acerca dos saberes dos professores que ensinam matemática nos AI conforme é destacado por Mumbach e Guidotti (2021) e Marco e Lara (2023).

Por fim, essa experiência de pesquisa propiciou à primeira autora outra forma de conceber a sala de aula, não apenas como um espaço em que o professor "passa" o conteúdo, mas sim como um espaço de discussões e trabalho conjunto com os estudantes em busca do encontro com os saberes matemáticos. Além disso, é interessante notar que durante o esforço conjunto com os estudantes o professor tem um papel de orientação muito importante.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento Algébrico: em busca de uma definição. **RPEM**: Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p.34-60, jan./jun. 2017. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1124/pdf_207>. Acesso em: 27 ago. 2017.

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

BONI, K. T. **Invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental em tarefas não-rotineiras**. 2014. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

BOGDAN, R. C., BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação:** uma introdução a teoria e aos métodos. Tradução: M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Batista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**: educação é a base. Terceira versão. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria Executiva, Secretária de Educação Básica, 2017.

BRANCO, N. C. V. **O desenvolvimento do pensamento Algébrico na formação inicial de Professores dos primeiros anos.** Tese. 2013. 506 p. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2013.
CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v.16, n. 2, p. 81-118, 2007. Disponível em: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf> Acesso em: 24 set. 2017.

CARVALHO, A. M. P. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula. In: SANTOS, F. M. T. dos; GRECA, I. M. (Org.). **A pesquisa em ensino de ciências no Brasil e suas metodologias**. 2. ed. ~~ver.~~ Ijuí, RS: Ed. Unijuí. 2011. 440p.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 97-126, abr. 2011. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4598> Acesso em: 24 set. 2017.

FERNANDES, R. K. **Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do Ensino Fundamental I**. 2014. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

FERREIRA, M. C. N. **Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamenta**l: uma análise do Conhecimento Matemático acerca do Pensamento Algébrico. 2017. 147f. Dissertação (Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Tradução: Babylon. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008. p. 5-18.

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

MARTINS, L. P. **Estudo sobre aspectos da Álgebra na passagem da Aritmética para a Álgebra**. 2015. 325 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

MATOS, D. V. LARA, I. C. M. Convergências e divergências entre o ensino de Matemática na Licenciatura em Pedagogia e nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **RIS**. Cerro Largo (RS), v. 6, n. 6, p. 433-452, Set./Dez. 2023. Disponível em: <https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/RIS/article/view/14098>. Acesso em 27 fev. 2024.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. 3. ed. Ijuí, RS: UNIJUÍ, 2016.

MUMBACH, S. GUIDOTTI, C. S. Formação de professores em comunidade: uma experiência com docentes que ensinam matemática nos anos iniciais. **RIS**. Cerro Largo (RS), v. 4, n. 2, p. 234 - 246, Edição Especial. 2021. Disponível em: < https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/RIS/article/view/12089>. Acesso em 27 fev. 2024.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Tradução: Babylon. In: NORTH AMERICA CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 2006. Bergen University College, 2006. v. 1.

______. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Tradução: Babylon. In: SIXTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. **Anais…** Lyon-França, 2009. Disponível em: <www.inrp.fr/editions/cerme6>. Acesso em: 03 set. 2018.

______. A origem histórica do pensamento algébrico. In: RADFORD, L. **Cognição matemática**: história, antropologia e epistemologia. São Paulo: Livraria da Física, 2011. p. 117-149.

______. **La enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva histórico-cultural**: la teoría de la objetivación. Tradução: Babylon. Bogotá, Colombia, 2014. Vídeo (50 min 52 s).

______. Methodological aspects of the theory of objectification. Tradução: Babylon. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, p.445-567, 2015.

______. Semiosis and subjectification: The classroom constitution of Mathematical subjects. Tradução: Babylon. In: PRESMEG, N. et al. (Ed.). **Signs of signification. Semiotics in mathematics education research**. Cham, Switzerland: Springer, 2018a. p. 21-35.

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024

______. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Tradução: Babylon. In: KIERAN, C. (Ed.). **Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds**: The global evolution of an emerging field of research and practice. New York: Springer. 2018b. p. 3-25.

SILVA, J. G. **O pensamento algébrico sob a ótica da teoria da objetivação**: uma análise a partir de episódios de trabalho conjunto no 5.º ano do ensino fundamental. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação) – Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2019.

SMITH, E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. Tradução: Babylon. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates. 2008. p. 19-56.

Recebido em: 25/09/2023
Aceito em: 13/04/2024