Vol. 3, n. 5. Set./Dez.
ISSN: 2595- 4520

Interpretação geométrica, conceitos e definições: procedimentos para a obtenção do *MMC* e *MDC*

Geometric interpretation, concepts and definitions: procedures for obtaining MMC and MDC

Alan Gonçalves Lacerda (lacerda.a.g@gmail.com)
Universidade Federal do Pará, Campus Marajó-Breves

Adriano Aparecido Soares da Rocha (adrianoasr37@gmail.com)
Universidade Federal do Pará, Campus Marajó-Breves

Robson dos Santos Ferreira (robsonf@ufpa.br)
Universidade Federal do Pará, Campus Marajó-Breves

Resumo: Neste trabalho exploramos os conteúdos de Mínimo Múltiplo Comum (*MMC*) e Máximo Divisor Comum (*MDC*) por meio de discussões sobre a interpretação geométrica, definições e conceitos. As definições e os procedimentos na matemática são comumente ensinados com o uso de algoritmos escritos o que exige repensar as práticas de professores que a ensinam, sobretudo práticas pedagógicas que permitam desenvolver o domínio do conhecimento e da linguagem matemática.

Palavras-chave: Interpretação geométrica; *MMC*; *MDC*.

Abstract: In this paper we focus on important discussion contexts for its elaboration: the geometric visualization and the mathematical concepts problematized to the content of the Common Minimum Multiple (*MMC*) and Maximum Common Divider (*MDC*). Definitions and procedures in mathematics are commonly taught using written algorithms which require rethinking the practices of teachers who teach mathematics, particularly pedagogical practices involving the acquisition and mastery of mathematical language.

Keywords: Geometric interpretation; *MMC*; *MDC*

1. INTRODUÇÃO

Entre as considerações acerca da qualidade no planejamento do ensino, sem dúvida uma das importantes estratégias é a exploração de conceitos por meio da visualização geométrica. Nesse sentido, abordar conceitos e definições matemáticas a partir de experiências com recursos didáticos tem sido uma estratégia recorrente por professores, sobretudo, nas aulas de matemática. Ademais, os objetivos das atividades

Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

podem ser ampliados e aprofundados quando desenvolvidas com material didático adequado.

Outra característica importante a ser considerada no processo de ensino é a escrita matemática, uma vez que esta opera e se constitui em geral de léxicos efetivamente específicos usados nas estruturas gramaticais e sintáticas em que elas assumem um importante canal para comunicar ideias e argumentar raciocínios (LACERDA, 2019). Este aspecto específico da linguagem matemática é aonde se dá os problemas de compreensão na produção de mensagens e nos orientam a repensar nossas propostas didáticas e o funcionamento da linguagem nas aulas.

Falando especificadamente das definições e os procedimentos para os cálculos do *MMC* e *MDC* que são focos desse trabalho, destacamos que são comumente ensinados com o uso de algoritmos escritos. Sendo que o que difere do procedimento prático ensinado nas escolas (algoritmos escritos), o qual será aqui reportado, reside em enfatizar a visualização geométrica para obtenção dos cálculos do *MMC* e *MDC*. Para tanto, nos ancoramos em estudos de Cardoso e Gonçalves (2004); Polezzi (2004); Oliveira (1995); Paterlini (2004) e Euclides (2009) para subsidiar as interpretações geométricas do MMC e MDC.

Assim, essa discussão pode ser usada como leitura a ser analisada (na formação de professores) ou como base para um estudo dos procedimentos a serem realizados em sala de aula, por exemplo, como proposta didática. Para tanto, trataremos e problematizaremos os procedimentos para determinação do Mínimo Múltiplo Comum (*MMC*) e Máximo Divisor Comum (*MDC)*, comumente evidenciado nas aulas de matemática, bem como o processo de introdução dos conceitos e definições matemáticas por meio da interpretação geométrica.

Sendo assim, a proposta aqui apresentada é decorrente de atividades de pesquisas oriundas do programa de monitoria da Universidade Federal do Pará, campus Marajó-Breves que resultou na apresentação de propostas educativas e elaboração de estratégias de ensino (LACERDA; MORAES, 2018).

2. ALGORITMO PARA O MÍNIMO MULTIPLO COMUM

Um dos objetivos deste trabalho é apresentar a importância de retomar os conceitos de mínimo múltiplo comum (*MMC*) e de máximo divisor comum (*MDC*),

Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

visto que ainda é comum que alguns professores não enunciem suas definições ou não generalizem as operações envolvidas nos procedimentos algorítmicos. Iniciaremos assim, elencando as definições do MMC e alguns de seus desdobramentos.

Definição: Sejam a e b dois números inteiros, dizemos que a é múltiplo de b, se existe um c inteiro tal que $a = bc.$ Desta equação, podemos também dizer que b divide a e denotamos pro $b|a$ (DOMINGUES; IEZZI, 2018).

Para que um número inteiro m, seja o mínimo múltiplo comum de a e b, sendo a e b dois inteiros não nulos, deve ocorrer duas condições (BASTOS, 2016):

(a) $a|m$ e $b|m$;

(b) m é o menor inteiro estritamente positivo que satisfaz a condição anterior.

Usaremos a notação usual, onde o mmc entre a e b é dado por $m = mmc(a, b).$

Portanto o MMC é representado pelo menor valor comum estritamente positivo pertencente aos múltiplos dos números. Observe por exemplo o MMC entre os números 4 e 6:

M(4) = {... -12, -8, -4, 0, 4, 8, **12**, 16, 20 ...} (conjunto dos múltiplos de 4)

M(6) = {... -18, -12, -6, 0, 6, **12**, 18, 24 ...} (conjunto dos múltiplos de 6)

O MMC entre 4 e 6 é equivalente a 12. O MMC corresponde ao menor número inteiro positivo, diferente de zero, que é múltiplo ao mesmo tempo de dois ou mais números.

O MMC é muito utilizado em operações com frações de denominadores diferentes e em soluções para os problemas matemáticos. Observemos algumas situações que podem ser descritas com a utilização do *MMC* em atividades de resolução de problemas, como por exemplo, (Figura 1): No alto da torre de uma emissora de televisão, duas luzes "piscam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante, as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a "piscar simultaneamente"?

15 ,	10	2
15 ,	5	3
5 ,	5	5
1 ,	1	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Recebido em: *24/01/2020*
Aceito em: *18/09/2020*

Figura 1 – Método usual para o cálculo do $mmc\ (15, 30)$

Fonte: Elaborado pelos autores

No procedimento adotado anteriormente, evidenciamos por meio da fatoração, uma das importantes definições ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Para o contexto em que é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética, define-se: para todo número natural $a > 1$ existem números primos $p_1, p_2, \dots, p_r$ $(r \geq 1)$, de maneira que $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$. Além disso, se também $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ $(s \geq 1)$, onde os q_j (j variando de 1 a s) são igualmente primos, então $r = s$ e cada p_i, (i variando de 1 a r) é igual a algum q_j (DOMINGUES; IEZZI, 2018).

No caso, o teorema anterior enuncia que um número natural pode ser expresso por fatores de números primos de forma única a menos da ordem dos fatores. Basta olharmos para os exemplos tomados a seguir (figura 2):

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10 \end{array}$$

Figura 2 - Fatoração em primos dos números 15 e 10

Fonte: Elaborado pelos autores

É de se esperar que professores simplifiquem a complexidade das definições e teoremas que está sendo apontado.

2.1 Outro modelo para o mínimo múltiplo comum

Na literatura pertinente ao assunto, nos ancoramos em estudos de Cardoso e Gonçalves (2004); Oliveira (1995); Paterlini (2004) para discorrer sobre o procedimento do MMC e MDC. O processo para determinar o mínimo múltiplo comum de dois números naturais m e n por meio da interpretação geométrica é apresentado por Cardoso e Gonçalves (2004, p.85) da seguinte forma:

> 1. Tomemos um retângulo ABCD de lados de comprimento m e n. O retângulo deverá estar subdividido em quadrados unitários.

Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

2. Partindo de um dos vértices do retângulo, traçamos as diagonais dos quadrados unitários observando a seguinte ordem:

a) Traçamos a diagonal do quadrado que tem o vértice coincidente com o vértice escolhido do retângulo.

b) traçamos, a partir do vértice no qual paramos, as diagonais dos quadrados que têm um ângulo oposto pelo vértice com o quadrado anterior ou, na ausência desse quadrado, traçamos a diagonal do quadrado ao lado e a partir do vértice onde paramos.

c) As diagonais dos quadrados unitários devem ser traçadas até que se chegue a um dos outros vértices do retângulo ABCD

d) Contamos quantos quadrados tiveram suas diagonais traçadas. O número encontrado é o mmc de m e n.

Como queremos evidenciar a interpretação geométrica para o procedimento anteriormente reportado por Cardoso e Gonçalves (2004), procedemos ao cálculo do *mmc* (5,10) conforme a Figura 3:

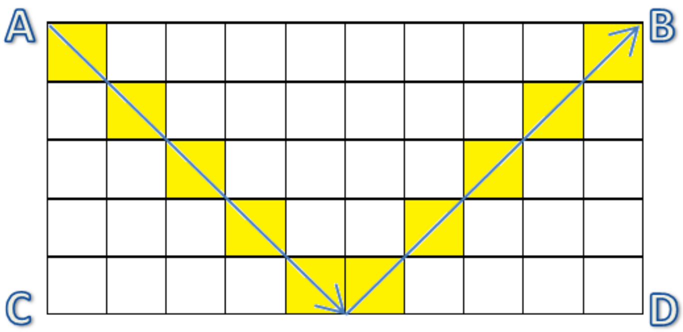


Figura 3 - Visualização geométrica do mmc (5,10) na malha quadriculada

Fonte: Elaborado pelos autores

O processo que nos dá o MMC pela interpretação geométrica (figura 3). Aplicando os passos que nos orienta Cardoso e Gonçalves (2004), em que foi tomado a partir do vértice A, traçamos suas diagonais dos quadrados a partir desse ponto até chegaremos ao vértice B. Assim para determinarmos o *MMC* basta contarmos o número de quadrados em que as diagonais passaram e obteremos nesse caso 10 que equivale aos quadrados pintados em amarelo conforme nos mostra a Figura 3. Este exemplo é um caso particular no qual $a|b$ e o $mmc(a,b) = b$, decorre que há n inteiro tal que $b = n \cdot a$, ou seja, no retângulo de dimensões $a \cdot b$, cabem n quadrados de lado a. Decorre que para sair de um vértice do retângulo e chegar em outro tem-se que contar exatamente $n \cdot a = b$ diagonais.

Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

Pensemos agora na situação em que a não divide b, para entendermos o processo consideremos o retângulo de dimensões 3 por 5 (Figura 4):

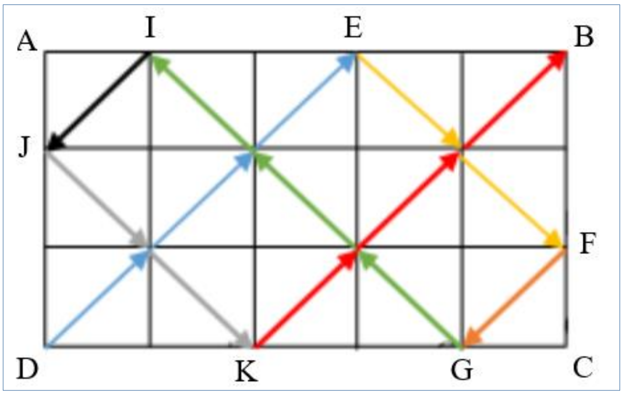


Figura 4 – Representação geométrica para o MMC (3,5)

Fonte: Elaborado pelos autores

Para sair de D e chegar a B, tivemos que percorrer 15 diagonais que é o *MMC* entre os números 3 e 5. Esse processo é detalhado no quadro 1, a seguir:

Quadro 1 - Explicação para o cálculo do *MMC*

Caminho	Diagonais percorridas no caminho	Diagonais percorridas no do início ao ponto atual
Para sair de D e chegar a E	3 diagonais (azuis)	Quantidade total de diagonais percorridas 3
Para sair de E e chegar a F	2 diagonais (amarelas)	Quantidade total de diagonais percorridas 5
Para sair de F e chegar a G	1 diagonal (laranja)	Quantidade total de diagonais percorridas 6
Para sair de G e chegar a I	3 diagonais (verdes)	Quantidade total de diagonais percorridas 9
Para sair de I e chegar a J	1 diagonal (preta)	Quantidade total de diagonais percorridas 10
Para sair de J e chegar a K	2 diagonais (roxas)	Quantidade total de diagonais percorridas 12
Para sair de J e chegar a B	3 diagonais (vermelhas)	Quantidade total de diagonais percorridas 15

Fonte: Elaborado pelos autores

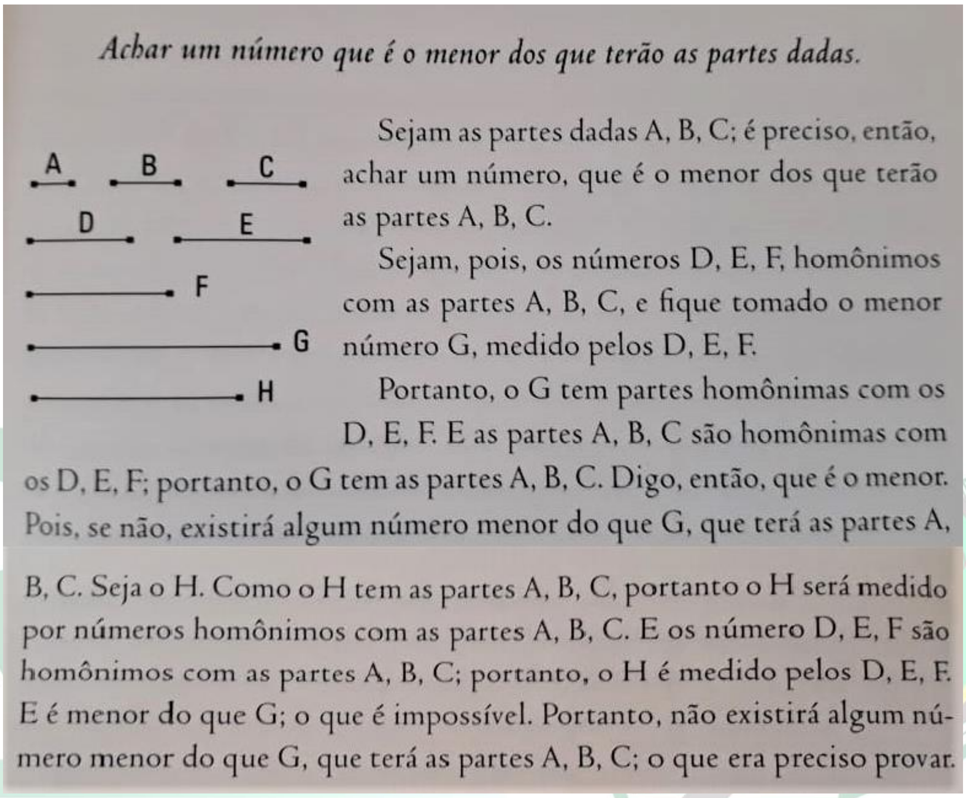
Como podemos observar no quadro 1, ao sair do vértice D, para chegar nos pontos que estão nos segmentos de retas AB ou CD são múltiplos de 3, já os pontos que se encontram nas segmentos retas AD ou BC são múltiplos de 5, podemos observar que o

Recebido em: *24/01/2020*
Aceito em: *18/09/2020*

Vol. 3, n. 5. Set./Dez.
ISSN: 2595- 4520

ponto B satisfaz os dois casos, sendo um número múltiplo de 3 e 5. No caso geral, basta estender a ideia obtida para esse caso particular.

Notamos essa prova do quando 1, na obra *Os elementos* de Euclides (2009), no livro VII, proposição 39 para cálculo do *MMC*. Conforme nos mostra a Figura 5:



Achar um número que é o menor dos que terão as partes dadas.

Sejam as partes dadas A, B, C; é preciso, então, achar um número, que é o menor dos que terão as partes A, B, C.

Sejam, pois, os números D, E, F, homônimos com as partes A, B, C, e fique tomado o menor número G, medido pelos D, E, F.

Portanto, o G tem partes homônimas com os D, E, F. E as partes A, B, C são homônimas com os D, E, F; portanto, o G tem as partes A, B, C. Digo, então, que é o menor. Pois, se não, existirá algum número menor do que G, que terá as partes A, B, C. Seja o H. Como o H tem as partes A, B, C, portanto o H será medido por números homônimos com as partes A, B, C. E os número D, E, F são homônimos com as partes A, B, C; portanto, o H é medido pelos D, E, F. E é menor do que G; o que é impossível. Portanto, não existirá algum número menor do que G, que terá as partes A, B, C; o que era preciso provar.

Figura 5 - Procedimento para encontrar o mmc na obra os elementos

Fonte: Euclides (2009)

A obra de Euclides (2009) é composta de 13 capítulos que reúnem os conhecimentos de aritmética, álgebra e geometria. A Figura 5 evidencia a demonstração geométrica para a determinação do cálculo do *MMC*. Ao termo homônimo não se sabe ao certo o que Euclides queria dizer, supõe-se aqui uma aplicação que pode ser usada para esclarecimento da proposição 39 para o cálculo do *MMC*. Tratado no exemplo geométrico, conforme nos indica a representação da Figura 6 na obtenção do cálculo para o *mmc* (2, 4, 8):

Recebido em: *24/01/2020*
Aceito em: *18/09/2020*

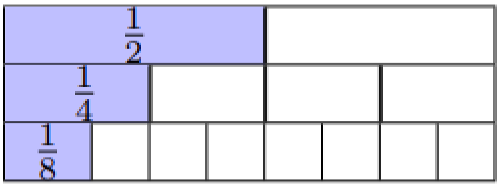


Figura 6: representação geométrica para o mmc (2,4, 8)

Fonte: Elaborado pelos autores

Observemos os múltiplos de 1/2 são {1/2 , 2/2, ...}; os múltiplos de 1/4 são {1/4, 2/4 , 3/4 , 4/4, ...}; os múltiplos de 1/8 são {1/8 , 2/8 , 3/8 , 4/8 , 5/8 , 6/8 , 7/8 , 8/8, ...} Daí temos que o número 1 é o múltiplo dos 3, e cabe 8 vezes a unidade 1/8 , sendo 8 o mínimo múltiplo comum.

O resultado obtido anterior nos sugere que o procedimento reportado por Euclides (2009, p.297-298) significa que dois números B e C são homônimos em relação ao número A, se A = BC, ou seja, são divisores de A cujo produto da A.

3. ALGORITMO PARA O MÁXIMO DIVISOR COMUM

O método prático de cálculo do *MDC* que costuma ser aplicado é conhecido como procedimento de divisões sucessivas. Antes de utilizarmos definamos o MDC, segundo Domingues e Iezzi (2018, p. 37):

Definição: Sejam a e b dois números inteiros. Um elemento d pertencente ao conjunto dos números inteiros se diz máximo divisor comum de a e b se cumpre as seguintes condições:

a) d é maior ou igual a zero;

b) d divide a e b;

c) Para todo d’ inteiro que divide a e b, então d' divide d

Para o entendimento do algoritmo das divisões sucessivas, são necessários dois lemas

1. Se a divide b, então o $mdc(a,b) = a$;
2. Se $a = b \cdot q + r$, então $d = mdc(a,b)$, se e somente se, $d = mdc(b,r)$.

Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

Para exemplificarmos, encontramos, por esse processo o $mdc\ (41,12)$. Esse processo é detalhado no quadro 2.

Quadro 2 - Explicação do processo de divisões sucessivas

O que é feito na prática	Utilização dos lemas	Justificativa por que continuar as divisões
$41 = 12 \cdot 3 + 5$	Pelo lema 2 $mdc(41,12)$ é igual ao $mdc(12,5)$	Devemos continuar pois 5 não divide 12
$12 = 5 \cdot 2 + 2$	Pelo lema 2 $mdc(12,5)$ é igual ao $mdc(5,2)$	Devemos continuar pois 2 não divide 5
$5 = 2 \cdot 2 + 1$	Pelo lema 2 $mdc(5,2)$ é igual ao $mdc(2,1)$	Devemos continuar a divisão para descobrir o que 1 divide 2 e encerrar o processo
$2 = 1 \cdot 2 + 0$	Pelo lema 1 como 1 divide 2, o $mdc(2,1) = 1$	Paramos por aqui, pois encontramos o mdc procurado

Fonte: Elaborado pelos autores

Na prática o que se faz na resolução é apenas o que se encontra na coluna 1 destacado em azul, mas achamos por bem colocar as colunas ao lado para justificar a veracidade do processo com base nos lemas 1 e 2 previamente enunciados.

Conforme nos mostra o quadro 3, usualmente, procede-se assim:

Quadro 3 - Procedimento usual para o cálculo do $\text{mdc}\ (41,12)$

	3	2	2	2
41	12	5	2	1
5	2	1	0	

Fonte: Elaborado pelos autores

O que consta no Quadro 3 é apenas uma maneira diferente de representar as divisões anteriores que fizemos no Quadro 2, sendo que na primeira linha coloca-se os quocientes das divisões, e na última os restos.

Consideremos a e b dois números, com a > b. Pensando de forma generalizada, o procedimento exposto se traduz na seguinte regra:

Quadro 4 – Procedimento usual para o cálculo do $\text{mdc}\ (a,b)$

	q_0	q_1	q_2	$\cdots$	q_{n-2}	q_{n-1}	q_n

Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

RIS Revista Insignare Scientia
Vol. 3, n. 5. Set./Dez.
ISSN: 2595- 4520

a	b	r_1	r_2	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	r_4	...	r_n	0	

Fonte: Adaptado de Iezzi,(2018)

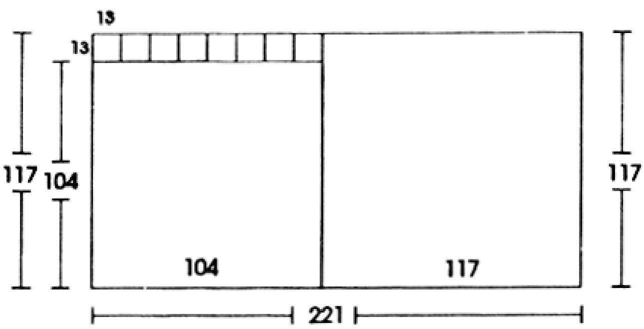
Observe que o dispositivo prático evidenciado anteriormente (Quadro 4) tem tantas colunas quanto forem necessárias até que se obtenha resto zero. O *MDC* será o último número da segunda linha.

Fazendo a leitura desses procedimentos anteriormente relatados, observamos uma das mais famosas enunciações do algoritmo de Euclides na obra Os Elementos, que apresenta o método para encontrar o máximo divisor comum.

3.1 Outro modelo para o Máximo Divisor Comum

Oliveira (1995) considera um importante modo de tratar o MDC por meio da visualização geométrica, por proporcionar aos professores e alunos uma interessante alternativa de abordar o conteúdo. Para isso a leitura e escrita assume um importante papel uma vez que como meio de expressão de comunicação, constituem orientações necessárias a aprendizagem de matemática e a interpretação geométrica. Pois como notamos o sentido para o que se lê deve ser construído na representação da figura retangular construída.

Tomemos como exemplo, o cálculo do $mdc\,(221,117)$ desenvolvido por Oliveira (1995) na resolução para o problema (Figura 7): Um terreno retangular de $221m$ por $117m$ será cercado. Em toda a volta desse cercado, serão plantadas árvores igualmente espaçadas. Qual o maior espaço possível?



Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

Figura 7 - Visualização geométrica para o $MDC\ (221, 117)$

Fonte: Oliveira (1995)

Podemos perceber outra operação para os cálculos do algoritmo de Euclides, chamada de subtrações sucessivas como nos sugere sua a obra. Mais especificamente no livro VII, proposições I e II, da obra *Os Elementos*, Euclides (2009) enuncia:

Livro VII, proposição I: "Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si" (p.270).

Livro VII, proposição II: "Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles" (p.271).

Essas proposições enunciariam atualmente uma construção por subtrações sucessivas, por exemplo, 221 – 117 = 104, 117 – 104 = 13, 104 – 13 = 91, 91 – 13 = 78, 78 – 13 = 65, 65 – 13 = 52, 52 – 13 = 39, 39 – 13 = 26, 26 – 13 = 13, 13 – 13 = 0. Nesse caso os números 221 e 117 não são primos entre si. As reflexões sugeridas visam instigar discussões para facilitar o entendimento dos problemas propostos. Usualmente, procede-se assim:

Quadro 5 – Procedimento para o cálculo do MDC (221, 117)

	1	1	8
221	**117**	**104**	**13**
104	**13**	**0**	

Fonte: Elaborado pelos autores

A interpretação geométrica do exemplo da seção anterior mdc (41,12) (Quadro 5), fica da seguinte maneira.

***Recebido em**: 24/01/2020*
***Aceito em**: 18/09/2020*

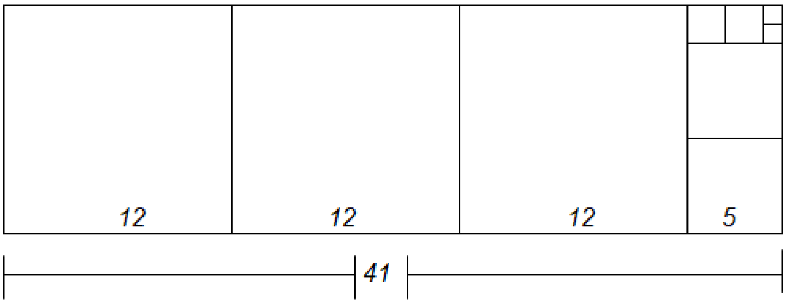


Figura 8 - Ideia geométrica do procedimento usual para o cálculo do mdc(41,12)

Fonte: Elaborado pelos autores

Observe que pela Figura 8 tínhamos um retângulo de 12 de largura por 41 de comprimento, dividimos o retângulo em quadrados de lado 12 (equivalente a $41 = 12 \cdot 3 + 5$), deu exatamente 3 quadrados e sobrou um retângulo de 5 por 12, dividindo este retângulo por quadrados de lado 5 (equivalente a $12 = 5 \cdot 2 + 2$), obtemos 2 quadrados de lado 5 e um retângulo de 2 por 5, dividindo o retângulo por quadrados de lado 2 (equivalente $5 = 2 \cdot 2 + 1$), coube dois quadrados e sobrou um retângulo de lado 1 por 2, dividindo por quadrados de lado 1 a divisão deu exata (equivalente a $2 = 2 \cdot \ 1 + 0$).

Ou por subtrações sucessivas, segue o procedimento 41 – 12 = 29, 29 – 12 = 17, 17 – 12 = 5, 12 – 5 = 7, 7 – 5 = 2, 5 –2 = 3, 3 – 2 = 1, 2 – 1 = 1. No caso específico restou uma unidade o que significa pela proposição I que os números 41 e 12 são primos entre si.

4. ALGORITMOS PARA O *MMC* E *MDC*

Como calcular o *MMC* e *MDC* com uma única fatoração? Nessa seção nos propusermos a evidenciar tal procedimento. Para procedermos ao cálculo do MMC e MDC como única fatoração, ou seja, decompor os números em fatores primos nos reportou a casos especiais e a métodos demonstrados por Paterlini (2004).

Observe o *MMC* de 4 e 6 a partir desse método:

$$4 = 2 \cdot 2 \tag{1}$$

$$6 = 2 \cdot 3 \tag{2}$$

Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

RIS Revista Insignare Scientia
Vol. 3, n. 5. Set./Dez.
ISSN: 2595- 4520

$$M(4) = \{\ldots - 8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20 \ldots\} \tag{3}$$

$$M(6) = \{\ldots - 12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, \ldots\} \tag{4}$$

O mmc é representado pelo valor comum pertencente aos múltiplos dos números. Podemos também determinar o mmc (4,6) entre dois números por meio da fatoração:

$$\begin{array}{cc|l} 4\,, & 6 & 2 \\ 2\,, & 3 & 2 \\ 1\,, & 3 & 3 \\ \hline 1\,, & 1 & 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 \end{array}$$

Figura 9 - Cálculo para o mmc(4,6)

Fonte: Elaborado pelos autores

Observe o *MDC* a partir desse método, em que escolhemos fatores comuns que dividem 4 e 6.

Para o $mdc\ (4{,}6) = 2$:

$$\begin{array}{cc|l} 4\,, & 6 & \mathbf{2} \\ 2\,, & 3 & 2 \\ 1\,, & 3 & 3 \\ 1\,, & 1 & \end{array}$$

Figura 10 - Fatoração em Números primos

Fonte: Elaborado pelos autores

Os cálculos de MMC e MDC estão relacionados com múltiplos e divisores de um número natural.

Paterlini (2004) apresenta um método para o cálculo de decomposição simultânea em números primos, isto é, a divisão se realiza enquanto tiver divisores comuns. Tomemos como exemplo, conforme ilustrado na Figura 11 o cálculo para determinar o *MMC* e *MDC* entre 2100 e 198:

Recebido em: *24/01/2020*
Aceito em: *18/09/2020*

ISSN: 2595- 4520

$$\begin{array}{rr|l} 2100\,, & 198 & 2 \\ 1050\,, & 99 & 3 \\ 350\,, & 33 & \end{array}$$

Figura 11 - Método para o cálculo do mmc e mdc

Fonte: Adaptado de Paterlini (2004)

Neste caso, evidenciado por Partelini (2004) o MDC é o produto dos números obtidos na coluna da direita. O resultado para o MMC é o produto do MDC pelo dos números primos entre si resultantes do dispositivo simplificado da última linha esquerda.

$$mdc\,(2100,198) = 2 \cdot 3 = 6 \tag{5}$$

$$mmc\,(2100,198) = 6 \cdot 350 \cdot 33 = 69300 \tag{6}$$

Podemos proceder no cálculo de alguns casos especiais envolvendo o MMC e MDC do dispositivo simplificado anteriormente. Nesta direção temos a seguinte relação:

$$mmc(a,b) = \frac{a \cdot b}{mdc(a,b)} \tag{7}$$

Em nosso trabalho, iremos nos valer de tal caso para justificar o método por interpretação geométrica que vislumbraremos na seção seguinte.

4.1 Outro modelo para a determinação do *MMC* e *MDC*

Para encontrar o MDC dos números a e b, construa um retângulo de lados medindo a e b, sendo a e b números inteiros, dividido em quadradinhos unitários. Trace uma das diagonais do retângulo e marque os pontos que são vértices de algum quadradinho unitário (POLEZZI, 2004).

Conforme nos orienta Polezzi (2004) procedemos à contagem de quantas partes esses pontos dividem a diagonal, o número obtido é o $mdc(a,b)$, e em seguida, trace linhas verticais e horizontais passando por cada ponto marcado, unindo os lados opostos do retângulo. O número de quadradinhos unitários existentes em qualquer um dos retângulos determinado é o $mmc(a,b)$

A Figura 12 apresenta a representação geométrica do $mmc(5,10)$ e $mdc(5,10)$.

Recebido em: *24/01/2020*
Aceito em: *18/09/2020*

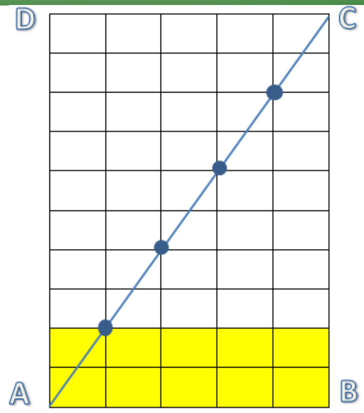


Figura 12 - Visualização Geométrica para o $mmc\ (5{,}10)$ e $mdc\ (5{,}10)$

Fonte: Adaptado de Polezzi (2004)

Observe que a diagonal do retângulo $ABCD$ passa pelos vértices de quadradinhos unitários e consequentemente a divide em 5 partes iguais, portanto, $mdc(5,10) = 5$. Perceba também que a diagonal divide o retângulo maior em 5 retângulos menores e cada um deles possui, igualmente, 10 quadradinhos unitários (parte amarela), concluindo que $mmc(5,10) = 10$.

Ao observamos a Figura 12, vemos, então, que as configurações procuradas ocorrem, no caso especial exemplificadas no tópico anterior para determinação dos algoritmos para o MMC e MDC.

Pensando de forma generalizada, suponhamos que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, seja $\acute{d}$ o $mdc(a,b)$, logo $\acute{d}$ divide a e $\acute{d}$ divide b, então $\left(\overline{AC}\right)^2 = a^2 + b^2 = (\acute{d} \cdot j)^2 + (\acute{d} \cdot k)^2 = \acute{d}^2(j^2 + k^2)$, portanto extraindo a raiz em ambos os membros concluímos que a diagonal $\overline{AC} = \acute{d} \cdot w$, onde w é um número real, porém $\acute{d}$ é inteiro, sendo justamente a quantidade de vezes que w cabe na diagonal, sendo está quantidade o $mdc(a,b)$ por definição.

Acompanhe, por exemplo, o cálculo do mmc de 5 e 10. A Figura 12 nos sugere que o cálculo do MMC seja obtido pela contagem dos quadradinhos das partes dividias pelo MDC conforme anteriormente já demonstrado. Tomamos o caso especial anteriormente retratado na seção anterior.

$$mmc(a,b) = \frac{a \cdot b}{mdc(a,b)} \tag{8}$$

Recebido em: *24/01/2020*
Aceito em: *18/09/2020*

Daí aplicando a regra já conhecida: o mmc obtido será o número de quadradinhos dos múltiplos inteiros comum a todos eles.

Para tanto, consideremos nas oficinas desenvolvidas por Lacerda e Moraes (2018), a importância de tratar os conteúdos matemáticos por meio da visualização geométrica e materiais de baixo custo para a determinação dos cálculos de MMC e MDC. Para a interpretação geométrica, o estudo está basicamente na leitura e compreensão da representação figural, portanto, é fundamental que a leitura seja feita de maneira que percebam as conexões com os conceitos matemáticos. É neste sentido que sinalizamos a importância de nossos estudos para a compreensão de definições e das propriedades subjacentes às regras operatórias dos cálculos para o MMC e MDC.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho ressaltamos a necessidade de abordar uma dinâmica diferente comumente adotada no trato aos conteúdos matemáticos. No caso específico podemos evidenciar por meio de uma folha de papel quadriculado, lápis e régua (materiais de baixo custo) as construções geométricas do MMC e MDC aqui ressaltadas.

Podemos ainda motivar e encorajar os alunos por meio dessa proposta do enfoque da interpretação geométrica para obtenção dos cálculos do MMC e MDC, sem, contudo deixar de enfatizar as definições e os conceitos matemáticos, subjacentes aos procedimentos algoritmos, uma vez que esses se fazem necessários para aquisição da linguagem matemática.

Tais atividades problematizam as definições e conceitos de MMC e MDC de uma maneira pouco usual na educação básica, que diz respeito às interpretações geométricas. Essas são algumas das razões, pelas quais elaboramos as atividades e nos levam a inferir que ler e escrever implicam muito mais do que codificar sinais e organizar frases com o intuito de responder ao modelo de comunicação nas aulas de matemática.

Ao pensarmos sobre o desenvolvimento desse tipo de atividade na educação básica, destacamos a importância do Laboratório de Ensino de Matemática que para Weber, et al (2018) pode se constituir como ambiente de experimentação para a construção do saber matemático. Portanto, podemos vislumbrar nos espaços do laboratório de Ensino, na recorrência de ferramentas tecnológicas as interpretações

Recebido em: 24/01/2020
Aceito em: 18/09/2020

geométricas para o MMC e MDC por meio do software GeoGebra, por exemplo, o que nos sugere que essa proposta didática pode ser ampliada.

7. REFERÊNCIAS

BASTOS, C. L. **Representações em matemática:** observações para o ensino e a aprendizagem em geometria. Dissertação (Ensino da Matemática). Programa de Pós-graduação profissional em matemática/Profmat. Universidade Federal de Goiás, UFG, Goiânia, 2016, p. 77.

CARDOSO, M. L.; GONÇALVES, O. A. Uma interpretação geométrica do MMC. **Explorando o ensino da Matemática,** Brasília, v. 2, 2004.p. 85-86.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. -5 ed-. São Paulo: Saraiva, 2018. 498p.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

LACERDA, A. G.. Para ler e interpretar o texto: reflexões a partir da linguagem e suas implicações para o ensino e aprendizagem de matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 31, p. 9-27, 2019.

LACERDA, A. G.; MORAES, V. O. Interpretação para o mmc e mdc: problematizando a visualização geométrica por meio do uso do papel quadriculado. Anais do 2º Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática, SENALEM, Rio de Janeiro, 2018, p.1-5.

OLIVEIRA, Z. C. Uma interpretação geométrica do MDC. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 29, 1995. p. 24-26.

PATERLINI, R. R. Um método para o cálculo do mdc e do mmc. **Explorando o ensino da Matemática,** Brasília, v. 1. 2004, p. 34-37.

POLEZZI, M. Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas? **Explorando o ensino da Matemática,** Brasília, v. 2. 2004, p. 87-89.

WEBER, E.; MAROSTEGA, J.; ABITANTE, L.; FUCHS, M. Implementação do Laboratório de Ensino de Matemática em Escolas de Educação Básica: repensando o processo de ensino e aprendizagem. **Revista Insignare Scientia - RIS**, v. 1, n. 2, 24 ago. 2018.

Recebido em: *24/01/2020*
Aceito em: *18/09/2020*