RIS
Revista Insignare Scientia

Vol. 2, n. 4. Set./Dez. 2019

ARTICULAÇÃO E COORDENAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICA E GRÁFICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA: A IMPORTÂNCIA DA INTERPRETAÇÃO FIGURAL

Articulation and coordination of algebraic and graphical representations of quadratic function: the importance of figural interpretation

Edrei Henrique Lourenço (henrique.edrei@gmail.com)
Colégio Politécnico de Sorocaba

Paulo César Oliveira (paulodfqm@gmail.com)
Bolsista no Programa Nacional de Pós Doutorado/CAPES (PNPD/CAPES) na UNESP (Campus Bauru).

Resumo: Neste artigo apresentamos um estudo bibliográfico com o objetivo de analisar as contribuições que a teoria dos Registros de Representação Semiótica tem ocasionado para o processo de ensino-aprendizagem do conceito de função, mais especificamente para a interpretação global das propriedades figurais da escrita gráfica e algébrica da função quadrática. Inicialmente apresentamos estudos realizados que apontam o grau de difusão dessa teoria no cenário nacional. Posteriormente com foco na análise das variáveis visuais e unidades significativas das representações gráfica e algébrica da função quadrática, elaboramos uma discussão sobre essa forma alternativa de ensino-aprendizagem; contrapondo o procedimento de atribuir valores particulares e pontos referenciais do plano cartesiano para a representação gráfica. A mobilização e coordenação entre a representação gráfica e algébrica, própria do estudo da função quadrática, envolveu também a discussão do fenômeno de congruência presente na operação de conversão dos registros de representação semiótica.

Palavras-chave: Função quadrática; semiótica; conversão de registros.

Abstract: In this article we present a bibliographic study with the objective of analyzing the contributions that the theory of Semiotic Representation Registries has made to the teaching-learning process of the concept of function, more specifically for the global interpretation of the figurative properties of graphical and algebraic writing. quadratic function. Initially we present studies that indicate the degree of diffusion of this theory in the national scenario. Subsequently focusing on the analysis of visual variables and significant units of graphical and algebraic representations of quadratic function, we discuss this alternative form of teaching and learning; contrasting the procedure of assigning particular values and reference points of the Cartesian plane to the graphical representation. The mobilization and coordination between graphical and algebraic representation, proper to the study of quadratic function, also involved the discussion of the congruence phenomenon present in the conversion operation of semiotic representation registers.

Keywords: Quadratic function; semiotics; register conversion.

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos diversas pesquisas apontaram um significativo crescimento nas produções acadêmicas brasileiras que utilizam a teoria dos registros de representação semiótica em suas análises: Pontes, Finck e Nunes (2017); Brandt e Moretti (2014a); Ferreira, Santos e Curi (2013); Colombo, Flores e Moretti (2008). Dentre esses estudos, Pontes, Finck e Nunes (2017) realizaram um estado da arte sobre a utilização da referida teoria em âmbito nacional contemplando pesquisas no período de 2010 a 2015 com o propósito principal de "revelar o nível de abrangência, objeto matemático, procedimentos metodológicos, e aspectos da teoria de Duval mais recorrentes nas pesquisas brasileiras" (PONTES; FINCK; NUNES, 2017, p. 298).

Das diversas contribuições resultantes desse trabalho, as autoras destacaram que "as transformações de tratamento e conversão estão presentes em 95% dos trabalhos analisados" (PONTES; FINCK; NUNES, 2017, p. 308). Esse fato ilustra, entre outros aspectos, a preocupação dos pesquisadores com estas duas importantes transformações de registros de representação. Embora a transformação do tipo "tratamento" seja mais comum nas práticas de ensino, Duval (2009) destacou que é justamente na transformação do tipo "conversão" que reside a maior fonte de incompreensão dos alunos, de modo que a especificidade dessas transformações será discutida com maior profundidade no desenvolver deste texto.

Pontes, Finck e Nunes (2017, p.302) destacaram, ainda, que o tema função foi alvo de 14 trabalhos no período considerado. Um deles, o de Lourenço e Oliveira (2014, p.369), destacou o "grau de desenvolvimento das dissertações e teses defendidas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), que abordaram o conceito de função à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica", por meio de uma revisão de literatura. Nos trabalhos analisados, os dois autores observaram que os pesquisadores levaram em conta "a notável dificuldade no aprendizado deste objeto matemático", o que "incentivou aprofundamento em diversos temas, com abordagens distintas" (LOURENÇO e OLIVEIRA, 2014, p.380).

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

A importância do conceito de função tanto em conexões internas à matemática como em outras áreas do conhecimento é notória. De fato, ele é estudado tanto na Educação Básica quanto em nível Superior, seja de forma implícita ou explicita. No entanto, como já destacado por Lourenço e Oliveira (2014), há uma notável dificuldade dos estudantes na aprendizagem deste conceito.

Ardenghi (2008) se interessou pelo tema optando por estudar e compreender o que já havia sido produzido a esse respeito, na forma de teses e dissertações, num dado período, em nível nacional. Sua proposta de pesquisa foi “sintetizar as contribuições apresentadas pelas pesquisas realizadas no Brasil, no período de 1970 a 2005” (ARDENGHI, 2008, p.12), com o objetivo central de identificar dificuldades e fatores que possam ser causadores de limitações no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, apontando sugestões e possibilidades para superá-los.

A consulta realizada por Ardenghi (2008) resultou em 46 trabalhos, sendo 43 dissertações e 3 teses, dentre os quais 9 foram selecionados para uma leitura e análise mais pormenorizada por conta de focarem especificamente nas dificuldades, na aprendizagem e no ensino do conceito de função. Desse modo, após sintetizar a análise desses trabalhos ele indicou que “as dificuldades com a conversão do registro gráfico para o algébrico e o não reconhecimento da função constante como função, são as mais citadas pelos pesquisadores” (ARDENGHI, 2008, p.63).

Além disso, na Base Curricular Nacional Comum (BNCC) destaca-se que para a aprendizagem das funções, em termos de competências específicas e habilidades, é importante identificar seus diferentes registros de representação de forma articulada, propiciando a transição e coordenação de um registro para outro. Assim, no trabalho escolar com funções torna-se necessário a discussão dos registros na língua natural (verbal), na forma de tabela algébrica e gráfica, salientando suas respectivas características, limites e vantagens. (BRASIL, 2018).

Nesta via nosso artigo tem o propósito de analisar as contribuições da teoria dos Registros de Representação Semiótica no processo ensino-aprendizagem do conceito de função, mais especificamente, a interpretação global das propriedades figurais da escrita gráfica e algébrica da função quadrática.

2. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

No contexto geral da semiótica o signo pode ser relacionado a um objeto concreto, como a ilustração de uma cadeira para representar o objeto que utilizamos para sentar, porém na especificidade da matemática o símbolo (signo) representa um objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito). De fato, o objeto matemático não é perceptível fisicamente, ou seja, é abstrato.

Para ilustrar a ideia de objeto abstrato no contexto da matemática podemos levar em consideração a própria natureza e definição do conceito de número. Conforme destacou Roque (2012), o conceito de número possivelmente emergiu da necessidade concreta de contagem, por meio de uma relação biunívoca entre o que se desejava contar e os dedos das mãos, riscos, pedras, gravetos, entre outras formas. A partir desse contexto, a noção de número é expressa pela quantidade de objetos em uma dada coleção. Isso “implica, portanto, uma ‘abstração’ em relação à quantidade dos seres que estão em cada coleção, para que apenas a quantidade seja considerada” (ROQUE, 2012, p. 87). A esse respeito, a pesquisadora ainda destaca que:

> O desenvolvimento do conceito de número, apesar de ter sido impulsionado por necessidades concretas, implica um tipo de abstração. [...]. Contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato (ROQUE, 2012, p.39).

A partir dessas ideias é possível associar um símbolo para determinado número obtido em um processo de contagem. Entretanto, é necessário ficar claro que o conceito de número (e qualquer outro objeto matemático) não é abstrato porque pode ser representado por um símbolo, mas sim, porque implica apartar-se da natureza individual dos seres de uma coleção, em detrimento de suas quantidades (ou outras características).

Ora, se o objeto de estudo da matemática é abstrato, situa-se no plano das ideias (apesar de muitas vezes surgirem de processos ou situações concretas), é necessário valer-se de símbolos para manipulá-los, isto é, seu acesso se dá via representações semióticas. Conforme destacou Duval (2009), a diferença crucial entre signo e representação semiótica é que, enquanto o primeiro faz apenas referência ao objeto representado, a segunda permite tanto a referência quanto transformações em outras representações referencialmente equivalentes.

Duval (2009, p.32) completou que a especificidade das representações semióticas “consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem,

Recebido em: *10/09/2019*
Aceito em: *02/12/2019*
ISSN 2595-4520

a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações ‘equivalentes’ em um outro sistema semiótico”.

Então, dada sua natureza abstrata, a matemática utiliza uma grande variedade de representações semióticas e, por essa multiplicidade de registros de representação, Duval (2009) enfatizou a necessidade de não confundir o objeto matemático com sua representação trazendo à baila a questão da dualidade entre o objeto e sua representação. A esse respeito ele expôs que “não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009, p.14). Isso se justifica no fato de que diferentes representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático. Portanto, destaca que “toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual” (DUVAL, 2009, p.91).

Para exemplificar esta ideia podemos considerar o conceito de função polinomial do primeiro grau, o qual pode ser representado, dentre outras formas, por meio da língua natural, diagramas, gráficos, tabelas ou linguagem algébrica. Então, as características de um objeto matemático não se esgotam em uma representação em especial, mas se completam por meio do conjunto de todas as suas representações.

Duval (2009, p.90) afirmou que “para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto não é possível, é necessário dispor de várias representações semioticamente heterogêneas desse objeto e coordená-las”. Portanto, no processo de aquisição do conhecimento matemático deve se levar em conta os diversos registros de representação semiótica, assim como as transformações específicas que estes permitem.

Segundo a teoria, tais transformações são corriqueiramente reduzidas a um traço comum, não fazendo distinção entre as atividades de tratamento e conversão. Desse modo, Duval (2009) destacou a importância dessas duas transformações de registros de representação, enfatizando a necessidade de distingui-las claramente.

O tratamento é uma transformação de representação dentro de um mesmo registro. A resolução de uma equação do 1º grau em sua representação algébrica para encontrar os zeros de uma função polinomial do 1º grau, serve de exemplo para este tipo de transformação. Já a conversão é uma transformação de representação que consiste

Recebido em: 10/09/2019
Aceito em: 02/12/2019
ISSN 2595-4520

em mudar o registro, conservando o mesmo objeto denotado. Por exemplo, dado um problema envolvendo uma situação funcional em língua natural podemos convertê-lo para uma expressão algébrica, tabular ou gráfica que seja referencialmente equivalente a ele e vice-versa, tendo em vista explicitar algumas características que podem facilitar a resolução do problema proposto.

A transformação do tipo tratamento é mais comum nas práticas de ensino, mas Duval (2009) destacou que é justamente na transformação do tipo "conversão" que reside a maior fonte de incompreensão dos alunos. No ensino de funções quadráticas, porém, é comum a atividade de conversão ser reduzida a um procedimento mecanizado que Duval (2011) chamou de '*ponto a ponto*'. Esse procedimento limita-se a associar alguns valores particulares e pontos referenciais do plano cartesiano. Segundo o pesquisador,

> esta abordagem favorece quando se quer TRAÇAR o gráfico correspondente de uma equação do primeiro grau ou o gráfico de uma equação do segundo grau. Favorece ainda quando se quer LER as coordenadas de algum ponto interessante (porque é ponto de intersecção com os eixos ou com alguma reta, porque é máximo, etc.) (DUVAL, 2011, p. 98)

No entanto esse procedimento ponto a ponto, mesmo após pratica contínua, não favorece a associação das variáveis visuais de representação e as unidades significativas da expressão algébrica. Assim, Duval (2011) propôs uma maneira alternativa que conversão de registros de representação semiótica pautado no que ele chamou de abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Nessa abordagem é analisada, inclusive em termos de congruência, toda modificação visível no traçado de uma curva e seu impacto na representação algébrica e vice-versa. Esse procedimento favorece significativamente a transformação gráfico-equação que no procedimento ponto a ponto é pouco evidente. E é justamente nesse sentido de conversão que o grau de não congruência aumenta e, portanto, a dificuldade dos alunos.

Para uma análise de congruência é necessário a discriminação de unidades significativas próprias das representações algébricas em relação ao traçado da curva analisada. Assim, na seção seguinte, aplicamos tal procedimento no estudo das funções quadráticas, explicitando as principais observações em quadros.

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

3. DISCUSSÕES A RESPEITO DO ESBOÇO DA PARÁBOLA SEGUNDO A ABORDAGEM DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DAS PROPRIEDADES FIGURAIS

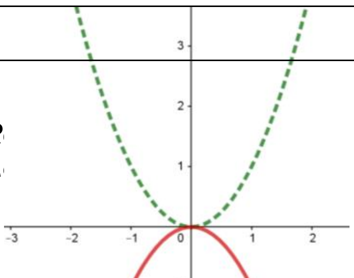
Conforme já destacado, a representação é o meio para se ter acesso ao objeto de estudo e não é, de fato, o objeto representado. É nesse sentido que Duval (2009) destacou a necessidade de não se confundir o objeto com sua representação. Além de se lançar mão de diferentes representações semióticas, esses dois (ou mais) registros devem ser trabalhados concomitantemente, de forma que haja uma articulação entre eles.

Em termos de metodologia de pesquisa, de acordo com o objetivo deste artigo, optamos por uma pesquisa bibliográfica na modalidade de ensaio teórico. A pesquisa bibliográfica, de acordo com Gil (2008), recorre às publicações que já receberam tratamento analítico que, no nosso caso, dois artigos publicados em periódicos nacionais, uma dissertação de Mestrado e dois capítulos de livro.

A partir da leitura desses materiais organizamos procedimentos de sistematização quanto a importância da interpretação figural na conversão e coordenação do registro gráfico e algébrico no estudo de função. Dessa forma, a partir do conteúdo exposto em quatro quadros que segue, procuramos evidenciar as possibilidades de articulações entre as representações algébricas e gráficas da função quadrática, considerando o duplo sentido na conversão das representações: do gráfico para a expressão algébrica e vice-versa.

Essa alternativa para o trabalho com funções quadráticas está apoiada em pesquisas cujos resultados são oriundos da utilização dos registros de representação semiótica como aporte teórico-metodológico, no caso, a dissertação de Mestrado de Maia (2007); os capítulos de livro (MORETTI, LUIZ (2014); CORRÊA, MORETTI (2014)) e os artigos de Menoncine e Moretti (2017); Mendonça e Pires (2018).

Quadro 1 - Análise das variáveis visuais e unidades significativas das representações gráfica e algébrica da função quadrática: concavidade

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA		REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA
	**Variáveis Visuais**	**A:** $f(x) = x^2$

ISSN 2595-4520

	Orientação da parábola em relação ao eixo horizontal, isto é, concavidade da parábola.	**B:** $g(x) = - x^2$
	Valores das Variáveis Visuais	**Unidades Significativas**
	A: a parábola possui concavidade voltada para cima. **B:** a parábola possui concavidade voltada para baixo.	**A:** o valor do parâmetro a é maior do que zero, isto é, a>0. **B:** o valor do parâmetro a é menor do que zero, isto é, a<0.

Fonte: Arquivo da pesquisa

Inicialmente a interpretação dos dados contidos nos quadros será realizada considerando a forma canônica de se apresentar uma função polinomial do 2º grau, que no caso do 'quadro 1' é idêntica à representação polinomial desenvolvida.

Na tentativa de identificarmos todas as modificações possíveis da curva chamada parábola, observamos a representação gráfica apresentada nesse primeiro quadro e evidenciamos a variável visual '*concavidade da parábola*', a qual pode assumir dois valores no caso das funções: voltada para cima e voltada para baixo.

É necessário esclarecer que, por se tratar de funções reais com variáveis reais, em que o domínio é habitualmente representado pelo eixo horizontal e a imagem está contida no eixo vertical, desconsideraremos as parábolas com concavidade voltada para a direita, para a esquerda ou em outras posições que não seja na direção vertical, por não satisfazerem as condições que definem tais funções. Todavia, o fato de não as considerarmos aqui não implica que seja desnecessário seu estudo, mas ao contrário, defendemos que sejam trabalhadas oportunamente no estudo mais genérico da Geometria Analítica.

Os gráficos das funções definidas por $f(x) = x^2$ (cor vermelha) e $g(x) = -x^2$ (cor verde) são simétricos em relação ao eixo x. Há uma reflexão em torno do eixo horizontal, ou seja, uma transformação que leva (x, y) em (x, -y). Dessa forma, tal simetria nos conduz a dizer que as duas parábolas apresentadas se diferem apenas pela posição (da própria noção de simetria).

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

RIS
Revista Insignare Scientia

Vol. 2, n. 4. Set./Dez. 2019

Segundo Duval (2011, p. 99), todas as modificações realizadas na imagem (conjunto traçado/eixos) "determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica", de modo que identificamos na representação algébrica tais modificações. Se considerarmos a representação genérica $f(x) = ax^2$, em que $a>0$, verificamos que quando o valor de 'a' é positivo a parábola estará voltada para cima, e, caso contrário, a parábola terá sua concavidade voltada para baixo, configurando assim a unidade significativa na representação algébrica. Nesta situação, portanto, verificamos que há congruência semântica entre a representação gráfica e a representação algébrica, uma vez que se convencionou em matemática que o eixo vertical tem sua orientação positiva para cima e a orientação negativa para baixo.

O parâmetro 'a' da forma genérica $f(x) = ax^2$, também é uma unidade significativa quando estamos interessados na variável visual abertura da parábola. Com base no conteúdo do 'quadro 2' analisamos tais relações.

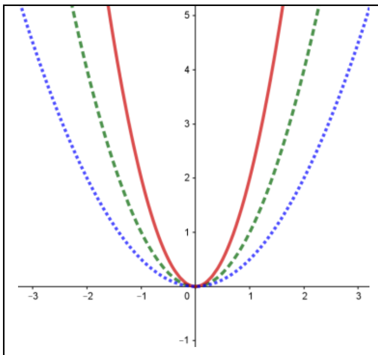
Quadro 2 - Análise das variáveis visuais e unidades significativas das representações gráfica e algébrica da função quadrática: abertura.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA		**REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA**
	Variáveis Visuais	**A:** $f(x) = x^2$ **B:** $g(x) = 2\,x^2$ **C:** $h(x) = \frac{1}{2}\,x^2$
	Abertura da parábola em relação ao eixo vertical.	
	Valores das Variáveis	**Unidades Significativas**

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

RIS
Revista Insignare Scientia

Vol. 2, n. 4. Set./Dez. 2019

	**Visuais**	
	A: abertura referencial **B:** a parábola é mais fechada em relação a abertura padrão. **C:** a parábola é mais aberta em relação a abertura padrão.	**A:** o valor do parâmetro ‘a’ é igual a 1, isto é, a= 1. **B:** o valor absoluto do parâmetro ‘a’ é maior do que 1, isto é, |a|>1. **C:** o valor absoluto do parâmetro ‘a’ é menor do que 1, isto é, |a|<1.

Fonte: Arquivo da pesquisa

Examinando o ‘quadro 2’, verificamos que a variável visual ‘abertura da parábola’ tem relação com o parâmetro ‘a’ na representação genérica f(x) = ax^2. Para simplificar o quadro consideramos apenas o traçado da parábola com concavidade voltada para cima, uma vez que da análise anterior decorre que bastaria considerarmos ‘-f(x)’ para que a concavidade se direcione para baixo de forma simétrica em relação ao eixo horizontal.

Então, quanto menor o valor absoluto de ‘a’ maior será a abertura da parábola e vice-versa, quanto maior o valor absoluto de ‘a’, menor será a abertura da parábola. Nesse caso nos deparamos com uma situação de não congruência, pois não se verifica a univocidade semântica terminal, que é um dos três critérios apresentados por Duval (2009) para a verificação da congruência semântica. Observe que é natural associarmos ‘**menor** valor absoluto de a’ com ‘**menor** abertura da parábola’, porém conforme já destacamos, quanto **menor** o valor absoluto de ‘a’, **maior** será a abertura da parábola. Isso caracteriza a não congruência semântica, segundo os critérios elencados por Duval (2009).

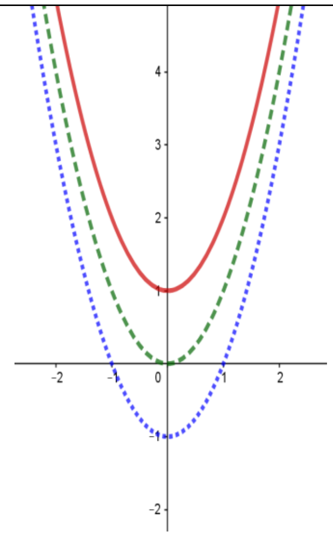
Além disso, quando a>0, a concavidade da parábola está voltada para cima, de modo que o menor valor assumido pela função é zero (em todos os casos apresentados no exemplo). As parábolas apresentadas no quadro têm o mesmo vértice (0, 0) e o mesmo eixo de simetria x = 0. Mas o vértice da parábola nem sempre será (0, 0). Iniciaremos a análise do deslocamento do vértice e, consequentemente, da parábola sobre o eixo vertical (Quadro 3) e posteriormente sobre o eixo horizontal (Quadro 4).

Quadro 3 – Análise das variáveis visuais e unidades significativas das representações gráfica e algébrica da função quadrática: translação vertical.

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

RIS
Revista Insignare Scientia

Vol. 2, n. 4. Set./Dez. 2019

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA		REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA
	**Variáveis Visuais**	**A:** $f(x) = x^2$ **B:** $g(x) = x^2+1$ **C:** $h(x) = x^2 - 1$
	Posição da parábola em relação ao eixo horizontal.	
	Valores das Variáveis Visuais	**Unidades Significativas**
	A: posição referencial **B:** a parábola deslocou-se verticalmente para cima em relação a posição referencial. **C:** a parábola deslocou-se verticalmente para baixo em relação a posição referencial.	**A:** o valor do parâmetro ‘k’ é igual a zero, isto é, k =0. **B:** o valor do parâmetro ‘k’ é positivo, isto é, k>0. **C:** o valor do parâmetro ‘k’ é negativo, isto é, k<0.

Fonte: Arquivo da pesquisa

Na análise do ‘quadro 3’, nota-se que a posição da parábola em relação ao eixo horizontal é a variável visual pertinente na representação gráfica considerada. Tal variável assume dois principais valores: (i) parábola deslocando-se verticalmente para cima em relação a posição referencial; (ii) parábola deslocando-se verticalmente para baixo em relação a posição referencial. Novamente consideramos apenas a situação em que a>0, na qual a concavidade da parábola está voltada para cima e analisando ‘-f(x)’ conseguiremos a situação simétrica, com concavidade para baixo.

No exemplo considerado, a parábola que tem como expressão algébrica $g(x) = x^2 +1$ está deslocada uma unidade para cima em relação a posição de $f(x) = x^2$ e a parábola dada por $h(x) = x^2-1$ está deslocada uma unidade para baixo em relação a posição de $f(x) = x^2$. Isso caracteriza esses valores (+1) e (-1) como unidades significativas para tal movimento de translação.

De modo geral, é possível verificarmos que o gráfico de $f(x) = ax^2 + k$ é congruente ao gráfico de $g(x) = ax^2$, porém sua posição é, em valores absolutos, ‘k’ unidades acima ou abaixo, conforme ‘k’ seja positivo ou negativo. Trata-se de uma translação vertical que leva (x, y) em (x, y+k), segundo o eixo ‘y’. Nesta situação verificamos que há congruência semântica entre as representações algébrica e gráfica, pois o sentido de deslocamento da parábola em relação à posição referencial (lugar

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

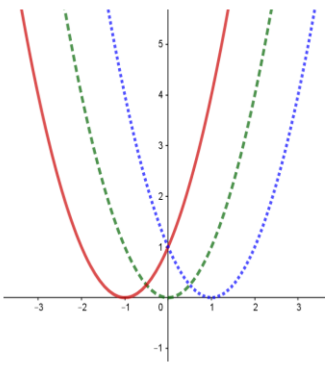
RIS
Revista Insignare Scientia

Vol. 2, n. 4. Set./Dez. 2019

geométrico da curva representada genericamente por g(x) = ax^2) é dado pelo sinal do parâmetro ‘k’: se k>0, então a parábola desloca-se para cima e se k<0, então a parábola desloca-se para baixo.

Outro tipo de deslocamento que analisamos é o da curva genérica dada por g(x) = ax^2 sobre o eixo horizontal, conforme conteúdo do ‘quadro 4’:

Quadro 4 – Análise das variáveis visuais e unidades significativas das representações gráfica e algébrica da função quadrática: translação horizontal.

<table>
<tr><th colspan="2">REPRESENTAÇÃO GRÁFICA</th><th>REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>Variáveis Visuais</td><td rowspan="2">A: f(x) = x^2
B: g(x) = $(x+1)^2$
C: h(x) = $(x-1)^2$</td></tr>
<tr><td>Posição da parábola em relação ao eixo vertical.</td></tr>
<tr><td>Valores das Variáveis Visuais</td><td>Unidades Significativas</td></tr>
<tr><td>A: posição referencial
B: a parábola deslocou-se horizontalmente para a esquerda em relação a posição referencial.
C: a parábola deslocou-se horizontalmente para a direita em relação a posição referencial.</td><td>A: o valor do parâmetro m é igual a zero, isto é, m=0.
B: o valor do parâmetro m é negativo, isto é, m<0.
C: o valor do parâmetro m é positivo, isto é, m>0.</td></tr>
</table>

Fonte: Arquivo da pesquisa

Ao analisarmos o ‘quadro 4’, concluímos que a posição da parábola em relação ao eixo vertical é a variável visual pertinente na representação gráfica considerada. Tal variável assume dois principais valores: (i) parábola deslocando-se horizontalmente para a esquerda em relação a posição referencial; (ii) parábola deslocando-se horizontalmente para a direita em relação a posição referencial. Vale lembrar que consideramos apenas a situação em que a>0, na qual a concavidade da parábola está voltada para cima e analisando ‘-f(x)’ conseguimos a situação simétrica, com concavidade para baixo.

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*

ISSN 2595-4520

Vol. 2, n. 4. Set./Dez. 2019

No exemplo, a parábola que tem como expressão algébrica $g(x) = (x+1)^2$ está deslocada uma unidade para a esquerda em relação a posição de $f(x) = x^2$ e a parábola dada por $h(x) = (x-1)^2$ está deslocada uma unidade para a direita em relação a posição de $f(x) = x^2$. Isso caracteriza esses valores (+1) e (-1) como unidades significativas para tal movimento de translação.

De modo geral, é possível verificarmos que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$é semanticamente congruente ao gráfico de $g(x) = ax^2$, porém sua posição é, em valores absolutos, 'm' unidades à direita ou à esquerda do gráfico de $g(x) = ax^2$, conforme 'm' seja positivo ou negativo, respectivamente. Trata-se de uma translação horizontal que leva (x, y) em (x+m, y).

Porém, é convencional ocorrer na prática escolar exatamente o contrário, ou seja, a não congruência em relação a esse tipo de translação. Isso decorre de um jogo de sinais característico das operações com números reais. Por exemplo, se na expressão $f(x) = a(x-m)^2$ atribuirmos os valores a=2 e m = -3 concluímos que a curva obtida será exatamente a mesma obtida por $g(x) = 2x^2$, deslocada 3 unidades para a esquerda. Todavia, substituindo os valores na expressão temos que $f(x) = a(x-m)^2$ torna-se $f(x) = 2(x+3)^2$ e é essa última que, geralmente, os alunos têm acesso nas tarefas que lhes são solicitadas. A partir de $f(x) = 2(x+3)^2$ o aluno deve inferir que o deslocamento é três unidades no sentido negativo e não no sentido positivo como sugere o símbolo (+), oriundo do jogo de sinais, caracterizando não congruência entre a representação de partida e chegada.

Da análise dos quadros 3 e 4, podemos inferir que conhecendo a representação gráfica da função quadrática cuja representação algébrica é dada por $g(x) = ax^2$, é possível proceder tratamentos tanto na expressão algébrica de outras funções quadráticas com parâmetro 'a', quanto na respectiva representação gráfica dessas funções.

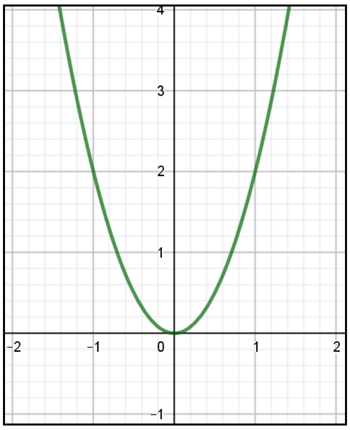
Para exemplificar essa inferência, consideramos duas situações: primeiro vamos fazer a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e, em seguida, vamos converter a representação gráfica para a representação algébrica. Neste processo de inversão na mudança de registros destacamos a diferença do custo cognitivo na transformação das representações semióticas destacadas.

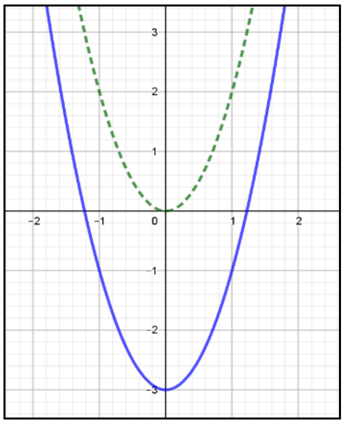
***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

RIS
Revista Insignare Scientia

Vol. 2, n. 4. Set./Dez. 2019

Seja a função definida pela lei $f(x) = 2x^2+8x+5$. Inicialmente verificamos que o registro algébrico ($f(x) = 2x^2+8x+5$) não representa um trinômio do quadrado perfeito e, portanto, podemos usar a técnica de completar quadrados para encontrar a forma canônica de representar a função quadrática. Assim, os procedimentos algébricos na forma de tratamento permitem reescrever a lei da função dada como $f(x) = 2(x+2)^2 – 3$. Portanto, dessa última notação decorre que a parábola pode ser obtida a partir do deslocamento da curva referencial dada por $g(x) = 2x^2$ (Gráfico 1a) em três unidades para baixo (Gráfico 1b) e duas unidades para a esquerda (Gráfico 1c), conforme conteúdo a seguir:





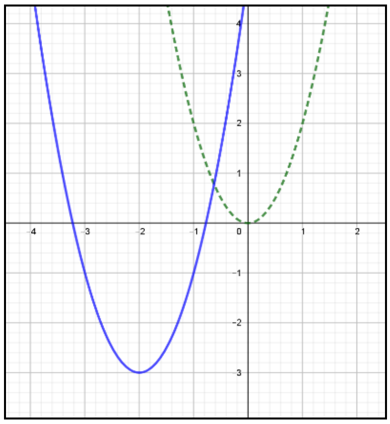
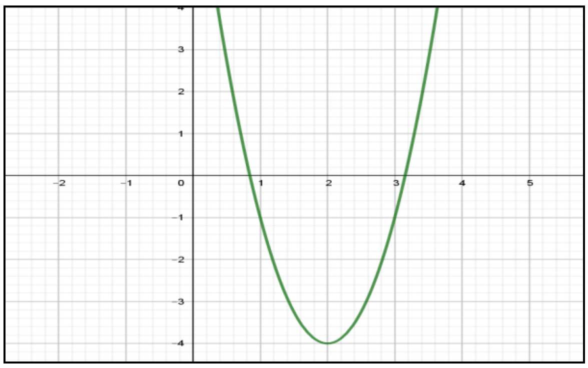


Gráfico 1a – $g(x) = 2x^2$ **Gráfico 1b –** $h(x) = 2x^2 - 3$ **Gráfico 1c – f**$(x) = 2(x+2)^2 - 3$

Vale ressaltar que as translações ocorridas nas representações gráficas '1a', '1b' e '1c' são procedimentos de uma transformação de registros de representação do tipo tratamento, posto que o registro de partida e o de chegada é o gráfico.

Agora, se considerarmos a representação gráfica da parábola (Gráfico 2) como registro de partida, expomos na sequência os procedimentos para obter o registro de chegada na forma algébrica.



***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

Gráfico 2 – Representação gráfica de uma parábola

Nessa situação (Gráfico 2) verificamos que a abordagem ponto a ponto, bastante comum no ensino de tal objeto matemático é praticamente ineficaz, pois mesmo construindo uma tabela com pontos obtidos pela observação do gráfico, a tarefa de generalização desses pontos para a representação algébrica tem um custo cognitivo elevado; caracterizando o fenômeno de não congruência.

Um caminho com menor custo cognitivo seria considerar a interpretação global figural, usando a translação como recurso. O vértice da parábola está deslocado duas unidades para a direita do eixo vertical, o que nos conduz a dizer que o valor do parâmetro ‘m’ é (+2). Além disso, o vértice da parábola está deslocado quatro unidades para baixo do eixo horizontal, isto é, k= - 4.

Com isso é possível inferir que a expressão algébrica é do tipo $f(x) = a(x-2)^2 - 4$. Para determinar o valor do parâmetro ‘a’ basta observar que, a partir do vértice da parábola, o deslocamento de uma unidade no eixo horizontal (direita ou esquerda), implica um deslocamento de três unidades para cima (a>0). Logo, a= 3 e a representação algébrica procurada é $f(x) = 3(x – 2)^2 - 4$. Ainda, caso desejado, podemos desenvolver tal expressão (tratamento) para obter $f(x)\ 3x^2 – 12x + 8$.

O recurso de translação é eficaz na conversão de registros quando o sentido é do gráfico para a equação. De acordo com Duval (2011),

> quando se trata de partir da representação gráfica para encontrar, por exemplo, a equação correspondente [...], é esta abordagem de interpretação global que se torna necessária. A razão disto se deve ao fato de que o recurso à abordagem ponto a ponto é totalmente inoperante uma vez que tira a atenção das variáveis visuais. A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado **no ensino** uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Compreende-se porque a maioria dos alunos fica aquém de uma utilização correta das representações gráficas (grifo do autor) (DUVAL, 2011, p.99).

Nas práticas de ensino é pouco usual a exploração dos tratamentos possíveis em se tratando da representação algébrica. Pouco se explora a transformação da forma polinomial $f(x)\ ax^2+bx+c$ para a forma canônica $f(x) = a(x-m)^2+k$, essencial para a abordagem via translações. Essa abordagem, conhecida como técnica de completar de quadrados favorece inclusive a resolução de equações polinomiais de segundo grau, não dependendo da corriqueira aplicação do algoritmo da fórmula de Bháskara.

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

Outras interpretações das variáveis visuais podem ser estudadas e merecem atenção nas práticas escolares, pois dependendo da tarefa que é solicitada ao aluno poderá favorecer sua resolução. É o caso da análise dos parâmetros ‘a’, ‘b’ e ‘c’ da expressão $f(x) = ax^2+bx+c$ na representação gráfica de tal função.

Como já destacado anteriormente o parâmetro ‘a’ é responsável pela orientação da concavidade e pela abertura da parábola (ver Quadro 2). Já o parâmetro ‘b’ indica se a parábola intercepta o eixo vertical no seu ramo crescente ou decrescente. Por fim, o parâmetro ‘c’, a ordenada do ponto no qual a parábola intercepta o eixo das ordenadas.

Dessa forma, “uma aprendizagem especificamente centrada na mudança e na coordenação de diferentes registros de representação, produz efeitos espetaculares nas macro-tarefas de produção e de compreensão” (DUVAL, 2009, p. 63) não só das funções quadráticas, pois no Ensino Médio, é a etapa na qual os alunos deverão aprofundar o estudo das funções.

Atrelado à base conceitual discutida nesse ensaio, vale destacar a importância das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no processo ensino-aprendizagem de função. Dois excelentes recursos são os *softwares* livres GeoGebra e Winplot. Há muitos trabalhos que poderiam servir de base para tal abordagem. O trabalho desenvolvido por Mendonça e Pires (2018, p.1) buscou “compreender como a utilização do *software* GeoGebra pode auxiliar alunos do Ensino Médio na aprendizagem de função exponencial por meio da mobilização, manipulação e coordenação de representações semióticas durante uma atividade interventiva”.

Maia (2007) abordou a construção de gráficos de função quadrática. A autora construiu uma sequência de atividades, amparada pelo *software* Winplot, que propôs a construção do gráfico desta função por meio da observação de um conjunto de variáveis visuais presentes tanto no gráfico quanto na representação algébrica. De acordo com Maia (2007), essa proposta pedagógica despontou como uma alternativa pedagógica viável para o estudo de função.

Ainda em tempo, é importante destacar que embora o foco desse estudo tenha sido a articulação entre as representações gráfica e algébrica do conceito de função, Duval (2009) orientou que diferentes representações semiótica para um mesmo objeto matemático se complementam, isto é, cada representação dessa natureza faz emergir,

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

muitas vezes, propriedades distintas para o conceito em estudo. Como exemplo, vamos retomar a função $f(x) = x^2$ com destaque para a sua representação exposta na tabela 1:

Tabela 1 – Representação tabular para $f(x) = x^2$

Abscissas (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ordenadas f(x)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121

Fonte: Arquivo da pesquisa

A relação biunívoca entre as variáveis permite estabelecer uma conexão entre funções quadráticas e progressões aritméticas. No caso da tabela 1, os valores na segunda linha (ordenadas) não caracterizam uma progressão aritmética, porém, se considerarmos a sequência formada pela diferença entre dois termos consecutivos da linha das ordenadas (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21), obtemos uma progressão aritmética de razão 2. É possível provar que isso ocorre para todas as funções quadráticas, de modo que essa é, inclusive, uma maneira alternativa de caracterizar tal objeto matemático.

Assim, notadamente nesse caso, a representação tabular proporciona a possibilidade de conexão entre dois assuntos importantes estudados no Ensino Médio. Certamente, para explorar tal característica das funções quadráticas, a representação tabular é mais favorável do que as representações algébrica e gráfica.

A coordenação e articulação das representações algébrica e gráfica das funções quadráticas, portanto, são pontos fundamentais a serem explorados no Ensino Médio para que haja uma compreensão mais completa do conceito de função, porém se faz necessário, igualmente, explorar com o devido cuidado as outras representações desse conceito, para que o aluno tenha uma visão macroscópica do tópico estudado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste ensaio teórico propomos analisar as contribuições que a teoria dos Registros de Representação Semiótica para o processo ensino-aprendizagem do conceito de função, mais especificamente, para a interpretação global das propriedades figurais da escrita gráfica e algébrica da função quadrática.

Recebido em: *10/09/2019*
Aceito em: *02/12/2019*
ISSN 2595-4520

Com base no fenômeno de congruência analisamos, em especial, as modificações visíveis no traçado da parábola e seu impacto na representação algébrica e vice-versa, em termos de custo cognitivo.

Mostramos a importância da mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica como forma de aprendizagem do conceito de função quadrática e as limitações de um processo de ensino pautado apenas na construção do gráfico ponto a ponto.

REFERÊNCIAS

ARDENGHI, M. J. **Ensino aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil.** 182f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica. **Perspectiva em Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v.7, n.13, p.22-37, 2014a.

______________________________ (Orgs.) **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática.** Ijuí: Unijuí, 2014b.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 12 mar.2018.

BRASIL. Secretária de Educação Média e Tecnologia. **PCN + Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 2002.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C.; MORETTI, M. T. Registros de representações semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, Campinas, v.16, n.29, p.41 – 72, 2008.

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

CORRÊA, M. O. S.; MORETTI, M. T. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. In: BRANDT, C. F. (Org.); MORETTI, M. T. (Org.) **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática.** Ijuí: Unijuí, 2014, p. 39-65.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.** Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.6, n.2, p. 96-112, 2011.

FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B. dos; CURI, E. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. **Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana**, Recife, v.4, n.2, 14p, 2013.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6ª ed São Paulo: Atlas, 2008.

LOURENÇO, E. H.; OLIVEIRA, P. C. O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.16, n.2, p.369-383, 2014.

MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MAIA, D. **Função quadrática:** um estudo didático de uma abordagem computacional. 141f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MENDONÇA, M. S.; PIRES, R. F. Um estudo sobre a aprendizagem de função exponencial no ambiente computacional. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v.26, n.2, p.1-28, 2018.

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*
ISSN 2595-4520

MENONCINE, L.; MORETTI, M. T. A interpretação global figural como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. **Educação Matemática em Revista**, Porto Alegre, ano 18. v.1, n.18, p.126-134, 2017.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. In: BRANDT, C. F. (Org.); MORETTI, M. T. (Org.) **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática.** Ijuí: Unijuí, 2014, p.67-87.

PONTES, H. M. S.; FINCK, C. B.; NUNES, A. L. R. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.1, p.297-325, 2017.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

***Recebido em**: 10/09/2019*
***Aceito em**: 02/12/2019*

ISSN 2595-4520