

## ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

### TEACHING THE VOLUME OF GEOMETRIC SOLIDS: A SYSTEMATIC LITERATURE REVIEW

Marcelo Morello<sup>1</sup>

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza<sup>2</sup>

#### Resumo

O presente artigo consiste em uma Revisão Sistemática de Literatura visando a discutir pesquisas nacionais e internacionais, publicadas no período de 1998 a 2024, que apresentem e discutam estratégias de ensino de volume de sólidos geométricos no Ensino Básico, além de conhecer relatos da comunidade científica sobre dificuldades demonstradas por estudantes quando submetidos a essas estratégias de ensino. Para esse objetivo, foi realizado um levantamento bibliográfico com base em dissertações, teses e artigos, dos quais 12 atenderam aos critérios protocolares da pesquisa. Os resultados evidenciaram as seguintes estratégias categorizadas em: uso de software Geogebra; ensino por meio de Resolução de Problemas; ensino por atividades e emprego de materiais manipulativos como meio didático. Quanto às dificuldades, muitos estudantes apresentaram embaraços específicos para cálculos matemáticos, a exemplo da determinação correta do volume de um prisma retangular. Outros se apoiaram em procedimentos matemáticos memorizados, dificultando, assim, compreensões necessárias para resolução dos problemas propostos pelos pesquisadores.

**Palavras-Chave:** Sólidos geométricos; Ensino de geometria espacial; Volume

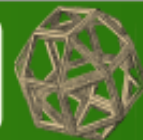
#### Abstract

This article consists of a Systematic Literature Review aiming to discuss national and international research published between 1998 and 2024 that presents and discusses strategies for teaching volume of geometric solids in Basic Education, in addition to knowing reports from the scientific community about difficulties demonstrated by students when subjected to these teaching strategies. For this purpose, a bibliographic survey was carried out based on dissertations, theses, and articles, of which 12 met the protocol criteria of the research. The results highlighted the following strategies: use of Geogebra software, teaching through problem-solving, teaching through activities, and use of manipulative materials as a didactic means. As for the difficulties, many students presented specific embarrassment for mathematical calculations, such as the correct determination of the volume of a rectangular prism. Others relied on memorized mathematical procedures, thus hindering the understanding necessary to solve the problems proposed by the researchers.

**Keywords:** Geometric solids; Teaching spatial geometry; Volume

<sup>1</sup> Mestre em Ciências, Tecnologia e Educação - Educação Matemática: Secretaria de Educação do Espírito Santo, m.marcelomorello@gmail.com e <https://orcid.org/0000-0002-7957-0019>

<sup>2</sup> Doutora em Educação Matemática pela UNICAMP: Instituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-graduação em Ciências e Educação Matemática, alicevffs@gmail.com e <https://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

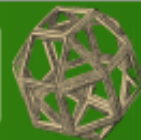


## Introdução

A palavra “Geometria” tem origem grega (*geo* é terra; *metria* vem de *métron*, ou seja, medição) e quer dizer “medir a terra”. Esse significado nos remete à preocupação de humanos solucionarem problemas relativos à demarcação de terrenos ou sobre a necessidade de projeção de construções (Eves, 1997). Com efeito, a história da matemática nos conta sobre sua remota origem relacionada às frequentes inundações do rio Nilo sobre áreas cultiváveis. Estamos nos referindo, portanto, ao Antigo Egito, quando o fenômeno das inundações inspirou e levou à soluções geométricas (*e.g.*, área de retângulo, triângulo retângulo isósceles, área de um trapézio retângulo, bem como volume de um paralelepípedo retângulo), contidas nos papiros de Moscou e Rhind, e são provenientes de fórmulas de mensuração necessárias para calcular áreas de terras e volumes de celeiros (Darela; Cardoso; Rosa, 2011), que foram aproveitadas posteriormente para projeção de pirâmides e outras construções. Essas soluções geométricas se prestaram para outros eventos e necessidades, fazendo surgir um *corpus* de conceitos e conhecimentos que, em seu conjunto, foram promovidos a um ramo da Matemática.

A Geometria, como a conhecemos hoje, é entendida como o estudo das formas planas, espaciais ou analíticas presentes na natureza e, conseqüentemente, acarretando relações e propriedades ligadas a essas formas (*e.g.*, lados, ângulos, faces, vértices, arestas). Esse *corpus* favoreceu áreas científicas fora da Matemática (*e.g.*, geometria fractal ajuda a decifrar objetos do mundo microscópico e macroscópico), aumentando, com isso, a importância de seu conhecimento e aplicações em diversos eixos acadêmicos, científicos e profissionais (*e.g.*, Biologia Molecular, Química Orgânica e Inorgânica, Ecologia, Engenharia Civil, Cartografia, Astronomia, Geografia).

A importância e capilaridade da Geometria nos leva ao olhar sobre seu ensino, vez que os educadores matemáticos Grandó, Nacarato e Gonçalves (2008) afirmaram haver pouco compartilhamento de ideias geométricas entre alunos, anos atrás. Esse cenário poderia ter sido alterado, mas não é o que parece ter ocorrido. Quatorze anos depois, Barros e Pavanello (2022) revelaram textualmente que “pesquisas [...] recentes apontam que o ensino da Geometria se mostra ineficiente e precário, o que evidencia as dificuldades tanto de professores quanto de alunos em todos os segmentos da Educação



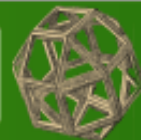
Básica.” Essa declaração alerta para o fato de o ensino da Geometria não estar alcançando os objetivos escolares desejados. Conseqüentemente, os alunos podem não estar aprendendo ou compreendendo conceitos geométricos a ponto de aplicá-los para solução de problemas.

Para além da solução de problemas e atividades de cunho prático, especificamente, a compreensão sobre o volume de sólidos geométricos impacta nos diversos aspectos da vida, desde o cotidiano até áreas mais complexas do conhecimento humano. Esse tópico é parte fundamental do currículo de Geometria, sendo essencial para a formação dos estudantes no Ensino Básico, pois estão fortemente presentes nas situações de compras e orçamentos (*e.g.*, valor monetário, massa, capacidade), na culinária (*e.g.*, massa, receitas, capacidade, tempo, temperatura), na saúde (*e.g.*, receitas médicas, transformações de unidades de medidas) e no desenvolvimento do raciocínio espacial (*e.g.*, dobraduras, 2D, 3D, geolocalização, programação), entre inúmeras outras. Nesse sentido, propomos verificar **quais estratégias de ensino de volume de sólidos geométricos são recomendadas, experimentadas ou praticadas pela comunidade científica da Educação Matemática ou por professores do Ensino Básico. Além disso, importa conhecer relatos da comunidade científica sobre dificuldades demonstradas por estudantes quando submetidos a essas estratégias de ensino**, por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura. A ideia é trazer ao primeiro plano um estudo crítico da literatura que ajude a expandir conhecimentos sobre esse ensino visando à contribuição de futuros investimentos científicos e profissionais, materializadas, por exemplo, em mais investigações e possíveis formações de professores.

Antes, porém, é útil discorrermos na próxima seção sobre os principais elementos que compõem o estudo dos sólidos geométricos e contribuições teóricas da comunidade científica específica nesse tema. Depois disso, descrevemos a metodologia, seguida dos resultados e discussão emersos da revisão. Por fim, encerramos este trabalho à guisa de conclusão e referências.

### **Sólidos Geométricos: Literatura Relevante**

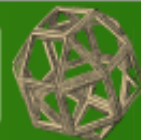
Não podemos nos referir a sólidos geométricos se não nos preocuparmos com o ensino das grandezas e medidas. Elas se encontram oficializadas como um campo da Matemática escolar nos currículos, que inicialmente se apresentaram nos Parâmetros



Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e, recentemente, se encontram na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2016), trazendo a habilidade de investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para cálculo do volume dessas figuras por meio de fórmulas.

A despeito da importância do conceito de volume de sólidos geométricos, pesquisas relataram dificuldades epistemológicas que estudantes apresentaram na aprendizagem desse conteúdo. Para Pavanello (2001, p. 183), o professor ao ensinar Geometria, não se preocupa “[...] em trabalhar as relações existentes entre as figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos”. É preciso que os estudantes tenham consciência de que os conceitos geométricos se concretizam por meio de atividades, que envolvam a observação e a comparação de figuras geométricas e seus diferentes atributos (*e.g.*, comprimento, largura e altura). Assim, cabe aludirmos ao pensamento de Viana (2000) de que os conceitos são de fundamental importância na e para aprendizagem da Geometria. Se esses são assimilados corretamente, ampla e profundamente, o indivíduo consegue usar e relacionar a teoria à aplicação. Walle (2009) também refletiu sobre o conceito de medida, relacionando-o a outros conceitos matemáticos – números, valor posicional, álgebra, raciocínio proposicional, frações, geometria. Além disso, trouxe orientações sobre o eixo de grandezas e medidas, em uma fusão do tempo, das medidas, do espaço e das grandezas, com diversas situações envolvendo, comprimento, área, volume, massa, tempo etc.

Bellemain, Bibiano e Souza (2018) evidenciaram desempenho insatisfatório de alunos do Ensino Básico, com erros persistentes na aprendizagem de conteúdos de Grandezas e Medidas emersos de resultados de avaliações de larga escala. Os estudantes confundiram as grandezas de área com perímetro, de massa com capacidade, entre outros equívocos. Também usaram as unidades de medidas inadequadamente, expressando seus resultados em centímetros quadrados para cálculo de perímetro e centímetros lineares para a área. Esses resultados levaram Torres (2024) a propor integração da teoria com exemplos do mundo real, problemas contextualizados e atividades práticas no ensino da Geometria, não apenas para tornar o conteúdo mais acessível, mas também por poder proporcionar aos estudantes uma oportunidade de visualização e aplicação dos conceitos em situações concretas.

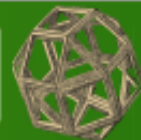


As argumentações de Pavanello (2001), Viana (2000), Walle (2009), Bellemain, Bibiano e Souza (2018) e Torres (2004) reforçam a necessidade de maiores investimentos em estudos sobre ensino e aprendizagem de Geometria e, especificamente, em sólidos geométricos. E é por isso que Lima e Bellemain (2010), inspirados nas recomendações da BNCC (2017), constataram as potencialidades de aprendizagem de alunos do Ensino Básico brasileiro, a partir de atividades de comparação, medição e produção para construção de importantes conceitos que compõem o *corpus* de conhecimento de volume e, conseqüentemente, interferem em compreensões de sólidos geométricos. Esses estudos inspiraram outras experimentações acerca de área e perímetro, obtendo o mesmo aproveitamento de alunos (*e.g.*, Mello, 2018; Figueiredo, 2013). É nesse sentido que a revisão de literatura, pode destacar ou reforçar estratégias de ensino de volume de sólidos geométricos recomendadas pela comunidade científica da Educação Matemática ou praticadas por professores do Ensino Básico.

## Método

Esta Revisão Sistemática de Literatura (RSL; Kitchenham *et al.*, 2007) tem enfoque no ensino de volume de sólidos geométricos a partir do levantamento de dissertações, teses e artigos publicados e de livre acesso, no período de 1998 a 2024, em periódicos nacionais e internacionais, por meio de descritores na língua inglesa e na língua portuguesa. Para a busca, utilizamos bases de dados com amplo acervo científico na área de Ensino e Educação dos quais elencamos: Catálogo de Teses e Dissertações da Capes (T&D), International Publisher Science, Technology, Medicine (Springer), Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), Directory of Open Access Journals (Doaj), Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Educational Resources Information Center (Eric) e Scientific Electronic Library Online (Scielo).

Aplicamos nessas bases, descritores que estão em sintonia com o tema desta revisão, cujas combinações, formaram as *strings* com o operador lógico AND: volume de sólidos geométricos, volumes, ensino de matemática, *volume of geometric solids* e *mathematics teaching*. A seleção, organização e importação dos trabalhos foi realizada por meio de uma planilha eletrônica específica (Mansur; Altoé, 2023), da qual obtivemos, inicialmente, 181 trabalhos, isentos de repetições. Esses trabalhos foram submetidos a

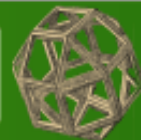


critérios de exclusão, após leitura dos títulos e resumos. Foram excluídos trabalhos que discutiam cônicas e quadráticas, revisões de estudos, volumes de livros, conceitos matemáticos e abordagem sobre volume sem versar sobre sólidos, pesquisas indisponíveis para consulta e capacidade em volume de livros didáticos.

Dos 181 selecionados, 12 foram qualificados e seguiram para apreciação de dois revisores e o autor dessa pesquisa, professores de Matemática e doutorandos do Programa de Pós-graduação em Ciências e Matemática - Educimat -, que realizaram leitura integral dos textos para validação da sintonia dos trabalhos com o objetivo revisional. Esses professores e pesquisadores deveriam verificar a data de realização do estudo, população estudada, tipo de intervenção realizada, estratégia metodológica empregada e desfechos encontrados. Para essa seleção os revisores deveriam responder aos seguintes questionamentos: (1) A pesquisa versa sobre ensino de volume de sólidos geométricos? (2) A pesquisa apresenta desafios ao ensinar volume de sólidos geométricos? As respostas dos avaliadores confirmaram a relevância dos 12 trabalhos alinhados ao objetivo desta RSL, cujos títulos, autores e ano de publicação, tipo (dissertação, tese ou artigo científico) e base são apresentados no Quadro 1.

**Quadro 1** - Título, autores/ano de publicação, tipo e base dos 12 trabalhos científicos

Título	Autores Ano de publicação	Tipo	Base
1- O Ensino de Volume de Sólidos Geométricos por Atividades	Moraes 2018	Dissertação	Educapes
2- Volumes de Sólidos Geométricos: Uma Proposta de Ensino com o Auxílio do Software Geogebra	Coutinho Junior 2018	Dissertação	Capes T&D
3- Áreas de Figuras Planas e Volumes Envolvendo Sólidos Geométricos, uma Abordagem Conceitual e Aplicada	Silva 2019	Dissertação	Capes T&D
4- Ilhas Interdisciplinares de Racionalidade de Fourez Aplicado do Ensino de Área e Volume no Ensino Fundamental	Bertoli 2015	Dissertação	Capes T&D
5- Algumas Contribuições do Lesson Study para a Formação do Professor de Matemática em Aulas que Promovam a Construção do Conceito de Volume	Wanderley 2019	Dissertação	Capes T&D
6- Problemas de Maximização de Área e Volume Aplicado ao Ensino Médio.	Rodrigues 2019	Dissertação	BDTD
7- Formulação e Resolução de Problemas sobre Volume e Capacidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais	Gama 2023	Dissertação	Capes T&D



8- An Investigation into the Performance, Solution Strategies and Difficulties in Middle School Students' Calculation of the Volume of a Rectangular Prism	Tekin-Sitrava e Isiksal-Bostan 2014	Artigo	Eric
9- Maximizing Volume with Solids and Nets	Miles 2014	Artigo	Eric
10- Learning Design on Surface Area and Volume of Cylinder Using Indonesian Ethno-mathematics of Traditional Cookie Maker Assisted by GeoGebra	Nursyahidah e Albab 2021	Artigo	Eric
11- Construindo uma Aprendizagem Significativa com História e Contextualização da Matemática	Souza 2009	Dissertação	Google
12- Ensinando Matemática Através de Atividades Lúdicas	Fischer, Goulart e Goulart 2006	Artigo	Google

Fonte: Autores, 2024.

Após leitura integral dos 12 textos, apresentamos uma síntese e discussão sobre cada pesquisa à luz das estratégias de ensino de volume de sólidos geométricos recomendadas, experimentadas e praticadas pela comunidade científica. Sempre que possível e disponível pelos autores, realçamos as dificuldades dos estudantes e professores e as metodologias utilizadas porque esses elementos podem ajudar a esclarecer ou justificar as opções metodológicas dos professores investigados.

## Resultados e discussão

Os resultados das 12 pesquisas (Quadro 1) geraram categorias pelo agrupamento da ênfase das estratégias em cada trabalho. Significa dizer que, embora haja alguma interseção entre as pesquisas em termos de estratégias de ensino, consideramos em cada trabalho a técnica com maior destaque. As categorias de ensino são por meio de: (1) Softwares Matemáticos; (2) Resolução de Problemas; (3) Atividades e; (4) Materiais Manipulativos.

### 4.1 Ensino por meio de softwares matemáticos

Os estudos de Coutinho (2018) e de Nursyahidah e Albab (2021) apresentaram abordagens para o ensino de matemática, com uso do software GeoGebra para explorar conceitos geométricos. Coutinho (2018) investigou contribuições do GeoGebra para ensino de volumes de sólidos geométricos e para dedução de fórmulas de volume, por



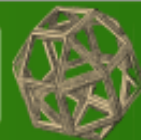
meio de uma sequência didática com uso de *applets* do GeoGebra em uma turma de 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio. Esse estudo alternativo foi comparado com um método tradicional baseado em conteúdo de um livro didático em uma turma de controle. Semelhantemente, Nursyahidah e Albab (2021) examinaram o ensino da área de superfície e volume de cilindros usando o contexto etnomatemático do bolo tradicional indonésio “Kue Putu”, por meio do GeoGebra, com alunos do nono ano em experimento piloto em sala de aula. As iniciativas de Coutinho (2018) e de Nursyahidah e Albab (2021), e os resultados da aprendizagem, estão em harmonia com o que defendeu Torres (2024) a respeito da interação da teoria com o mundo real em atividades práticas com a geometria, por surtirem efeitos positivos no desempenho dos alunos mediante oportunidades de visualização e aplicação dos conceitos.

Mais do que a aproximação com o mundo real, vale ainda ressaltar que Coutinho (2018) aproveitou o contexto para focar na dedução de fórmulas matemáticas e no ensino de volumes de sólidos diversos, enquanto Nursyahidah e Albab (2021) se concentraram no cilindro, usando um contexto cultural específico. Coutinho (2018) observou dificuldades epistemológicas iniciais dos alunos com a dedução de fórmulas. Nursyahidah e Albab (2021) destacaram a eficácia do contexto cultural para engajar os alunos. Em resumo, ambos demonstraram que o GeoGebra pode ser um aliado às didáticas inovadoras e a contextos culturais. Esse software pode enriquecer o modo de ensinar e, conseqüentemente a aprendizagem de conceitos geométricos, proporcionando um entendimento matemático mais profundo e significativo para os estudantes.

#### **4.2 Ensino por resolução de problemas**

Os estudos de Tekin-Sitrava e Isiksal-Bostan (2014) e Souza (2009) admitiram as dificuldades do ensino e aprendizagem de Geometria Espacial, e, por isso, decidiram experimentar metodologias alternativas. Os primeiros investigaram o desempenho de estudantes do Ensino Médio de uma escola privada em Istambul, Turquia, para aprendizado de volume de um prisma retangular por meio de cálculos e de solução de situações-problemas. Para compreensão das dificuldades epistemológicas, os estudantes foram solicitados a responder um questionário envolvendo três problemas e a participar de entrevistas semiestruturadas individuais após aplicação das situações-problemas.

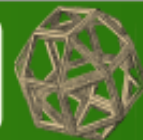




Tekin-Sitrava e Isiksal-Bostan (2014) esperavam que os estudantes os resolvessem e depois explicassem estratégias de solução para aqueles cálculos. Os resultados revelaram dificuldades específicas para os cálculos e foram classificados com um nível moderado de compreensão dos problemas. Além disso, os alunos foram capazes de criar uma quantidade limitada de estratégias de solução e muitos não conseguiram calcular corretamente o volume de um prisma retangular. O estudo de Souza (2009) investiu na História da Matemática para contextualização do cotidiano profissional do futuro técnico em Agropecuária, com estudantes da 3ª série do Ensino Médio da Escola Agrotécnica Federal de Catu (EAFC-BA). Paralelamente, usou a resolução de problemas como uma oportunidade para modificar o ensino habitual das aulas de matemática. Essa experiência gerou novos conceitos e conteúdos sobre sólidos geométricos para os alunos.

O estudo de Tekin-Sitrava e Isiksal-Bostan (2014) identificou ampla carência de compreensão dos estudantes no reconhecimento de cubos unitários comuns em duas faces adjacentes, a exemplo da dificuldade relacionada ao cálculo do volume de prisma retangular. Souza (2009), por sua vez, constatou ênfase em memorização de fórmulas, muito comum em ensinamentos pautados em procedimentos mecanizados. A constatação de Souza (2009) vai ao encontro do clamor de autores da literatura relevante ao defenderem desenvolvimento de conceitos que formem o *corpus* de conhecimento de volume (Lima; Bellemain, 2010) e, por isso, esses estudos objetivaram desenvolver estratégias de ensino que superem a singular memorização de fórmulas, promovendo mais compreensão conceitual da matemática e, conseqüentemente, obtendo possível desempenho satisfatório para o tema.

De modo diverso, mas igualmente preocupados com o aproveitamento de alunos em problemas que envolviam sólidos geométricos, Gama (2023) e Rodrigues (2019) buscaram construir os conceitos de volume e capacidade, por meio de três diferentes atividades estratégicas denominadas de comparação, medição, e produção, tal como validado e recomendado por Lima e Bellemain (2010), mas com enfoques metodológicos distintos. Na pesquisa de Gama (2023), com apoio da Teoria dos Campos Conceituais, estudantes do Ensino Médio de uma escola de formação militar de Recife - PE foram submetidos à formulação e resolução de problemas. Os estudantes demonstraram dificuldades epistemológicas em desenvolver um raciocínio que suportasse uma resolução a partir dos dados iniciais do problema. Houve, no entanto, menor dificuldade

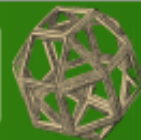


em criar um problema semelhante a partir de um problema dado. Atividades de medição com fórmulas e transformação de unidades foram mais utilizadas. Esses estudantes não reconheceram formatos cúbicos e não foram capazes de converter unidades de medidas. Atividades de comparação e produção foram menos frequentes nessa investigação.

A pesquisa de Rodrigues (2019) foi proposta em uma turma de Educação de Jovens e Adultos (Ensino Médio) mediante resolução de três problemas de dois diferentes modos: uma pelo método convencional de fórmulas, e outra por uma estratégia de resolução alternativa. Os problemas foram selecionados para explorar conhecimentos sobre características e propriedades de figuras planas e cálculo de áreas e volume. A autora ofertou um minicurso visando a apresentar a otimização de áreas e volumes de funções com duas variáveis. Ela aplicou um pré-teste para verificar o que os estudantes dominavam sobre cálculo de volumes e área, bem como a otimização e sua importância na sociedade. Foi apresentado também o conceito formal de otimização, conforme Bazzo (2006, p. 183), como “o processo de procura por uma solução que forneça o máximo benefício segundo algum critério”, e a abrangência do tema nos diversos campos (*e.g.*, na informática, economia, engenharia, entre outros), e na vida prática.

O método proposto por Rodrigues (2019) envolveu abordagem inicial por conhecimentos de características e propriedades de figuras planas, cálculo de áreas e volume, escrita de expressões na linguagem matemática, domínio na manipulação de equações, atribuição de valores a uma variável e análise de tabelas. O resultado do pós-teste revelou que o processo utilizado na resolução dos problemas necessitaria de aprimoramentos. A autora acredita que a complexidade das resoluções para o perfil da turma, a pouca familiaridade com o método trabalhado, a dificuldade de interpretação de texto, as perguntas mal elaboradas e a mistura de diversos conteúdos possam ter contribuído para um resultado não satisfatório como almejado.

Bertoli (2015) apresentou uma proposta metodológica de ensino interdisciplinar embasada na Ilha Interdisciplinar de Racionalidade (IIR) - uma metodologia de ensino voltada para a Alfabetização Científica e Tecnológica proposta por Gérard Fourez, que visa à formação de estudantes críticos, autônomos e que saibam negociar perante situações que demandem atuação incisiva na sociedade. O principal objetivo foi aplicar e analisar o desenvolvimento de uma IIR para o ensino de área e volume com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, em alunos de uma escola municipal em Pouso Redondo

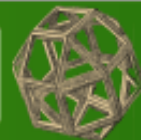


(SC). A ideia era descobrir como ensinar sólidos geométricos por meio da solução de situações-problemas contextualizadas. Bertoli (2015) apresentou dois tipos de IIR: as que se organizam por projetos e as do tipo noção. Optou pela segunda porque os conhecimentos e conceitos de área e volume já existiam na cultura brasileira, não precisando, portanto, criar uma representação. Essa metodologia de ensino possibilitou construir junto aos estudantes e grupo de professores um trabalho interdisciplinar, contribuindo para a construção de uma alfabetização científica e promovendo uma participação ativa e autônoma dos estudantes no tema de sólidos geométricos. Os estudantes demonstravam grandes dificuldades, pois não apresentavam em suas estruturas cognitivas elementos suficientes para conceituar área e volume. O processo de ensino e investigativo necessitou do empenho e dedicação de todo o grupo de professores e estudantes, por ser tratar de um trabalho interdisciplinar. Com a união e o engajamento desses participantes, foi possível garantir que a IIR resultasse em aprendizagem do conteúdo em voga. Dessa forma, a autora concluiu que os resultados da pesquisa, a incentivaram a promover novos projetos, com uso da metodologia da IIR.

#### **4.3 Ensino por atividades**

Moraes (2018) trouxe como objetivo de pesquisa avaliar as implicações de uma sequência didática com atividades inovadoras para aprendizagem de estudantes do Ensino Médio de uma escola pública do Pará sobre cálculo de volume de sólidos geométricos. Usou a Engenharia Didática como metodologia, que envolveu a concepção, realização, observação, desenvolvimento e análise dessas atividades. A motivação para desenvolvimento da pesquisa se deu pela observação da autora de que a Geometria no Ensino Fundamental, muitas vezes, não está relacionada a outros conteúdos matemáticos, como aritmética e álgebra, tendo apelo em ilustrações e figuras sem potencial para formação de conceitos e propriedades acerca dos sólidos geométricos, em especial.

A observação de Moraes (2018) encontra eco em reflexões de Walle (2009) quando advertiu sobre a necessidade de relacionamento do conceito de medida a outros conceitos matemáticos. De acordo com Moraes (2018), a Matemática, a Geometria, fórmulas, números, letras, figuras, áreas, volumes, medidas etc., devem ser encaradas de maneira interconectada e com dinamismo, mesmo em se tratando de teorias e fórmulas. Nesse sentido, os resultados alcançados por Moraes (2018) o habilitaram afirmar que a



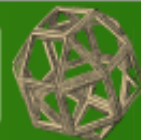
sequência didática desenhada pode melhorar o ensino, com consequências benéficas para a aprendizagem de Geometria, especificamente no cálculo de volumes.

#### **4.4 Ensino por materiais manipulativos**

Fischer, Goulart e Goulart (2006) e Silva (2019) optaram pelo uso de materiais manipulativos para ensino de áreas e volumes. Os primeiros desenvolveram uma proposta pedagógica por meio de atividades lúdicas com geoplano para ensino de áreas de figuras planas, perímetro e área do círculo, volume de sólidos geométricos. As atividades envolviam jogos pedagógicos em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental no Instituto Samuel Graham, em Jataí-GO. O segundo propôs um modelo de desenvolvimento progressivo de conteúdos de cálculo de áreas e volumes, utilizando material físico para justificação do cálculo de áreas e volumes de diversos sólidos geométricos: prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera etc. Ambos objetivavam contribuir de maneira alternativa às tradicionais apresentações de fórmulas matemáticas para aprendizagem desses conteúdos.

Para Fischer, Goulart e Goulart (2006), os jogos ajudaram na construção de conceitos e na compreensão dos conteúdos de Geometria. Os estudantes se tornaram mais ativos e deixaram de ser meros memorizadores de fórmulas nesse momento. Essa postura e providência nos remete a Viana (2000) quando nos lembra de que os conceitos são de fundamental importância na e para aprendizagem da Geometria. Além disso, o trabalho em equipe, estimulado naturalmente por jogos, favoreceu a socialização, o desenvolvimento de autoconfiança e iniciativa, especialmente entre os alunos mais inibidos, embora o barulho tenha incomodado alguns alunos e o desinteresse de outros tenha sido evidente. Esses fatores são considerados inerentes em atividades em grupos, sobretudo em jogos.

Silva (2019), por sua vez, identificou rejeição dos estudantes à Matemática, de maneira geral, e, segundo ele, essa repulsa foi atenuada por meio do uso de material manipulativo, facilitando a compreensão e justificação dos cálculos de áreas e volumes, além de promover desenvolvimento de habilidades de leitura e interpretação de problemas. A principal meta de Silva (2019) era a superação da rejeição inicial dos alunos à matemática e envolvê-los no processo de suas próprias aprendizagens.

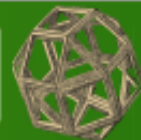


Ainda sobre manipulativos físicos, Miles (2014) analisou como estudantes do 9º ano maximizaram o volume de um recipiente doméstico à sua escolha. Os estudantes mediram as dimensões do recipiente, desenharam uma rede bidimensional para representar o sólido tridimensionalmente e determinaram sua área superficial e volume. Eles também projetaram sólidos alternativos com o mesmo volume, mas com menos área superficial. Ao final da atividade, os estudantes resumiram suas conclusões em formato de relatório à sua escolha. Essa atividade foi qualificada como uma tarefa de desempenho autêntica, porque se constituiu como um problema do mundo real, que é definido dentro de um contexto de restrições e possibilidades realistas. Para além dessa perspectiva, a atividade exigiu que os estudantes empregassem habilidades de pensamento de ordem superior.

Para Miles (2014), o discurso matemático e a aprendizagem por descoberta ao longo da unidade pareceram garantir aos estudantes compreensão dos conceitos de medição por meio de atividades de manipulação. Uma dessas atividades era encontrar as planificações (redes) de um cubo com 11 redes distintas, ou padrões bidimensionais, que quando dobradas, formavam um cubo. A autora orientou que os estudantes poderiam usar papel quadriculado grande ou manipuladores comerciais, como Polydrons, para ajudar a encontrar redes cúbicas e esboçarem uma possível rede para o recipiente. Para alunos com afinidades tecnológicas, foi orientado acessar um portal remoto que os permitia interagir com as redes de um cubo. A autora aplicou essa proposta por dois anos e descobriu que os produtos entregues no segundo ano foram superiores em qualidade e precisão matemática aos do primeiro ano de aplicação. Durante o segundo ano, todos os estudantes entregaram um projeto com melhores resultados à conclusão do trabalho simulado.

Wanderley (2019) contribuiu para o desenvolvimento profissional do professor de matemática em uma formação continuada sobre sólidos geométricos, baseada na metodologia do Lesson Study. Um grupo de nove professores construiu colaborativamente um planejamento de aulas para construção do conceito de volume para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Vitória (ES). O planejamento foi implementado por um dos professores e refletido criticamente após as aulas.

Na pesquisa de Wanderley (2019), ficou definida a utilização de uma problematização que despertasse interesse e participação dos alunos, materializada em

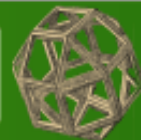


três tipos de atividades: de comparação, de medição e de produção, tal como validado no estudo de Lima e Bellemain (2010). O manipulativo físico escolhido para as três atividades foram três blocos de papelão, trinta blocos de dois tamanhos diferentes em MDF (Medium Density Fiberboard) e seiscentos bloquinhos de mesmo tamanho também em MDF, que serviram de unidade de volume. O grupo de Lesson Study planejou as medidas dos materiais com base nas comparações, medições e produções que desejavam que os alunos alcançassem compreensão, pois, as dimensões dos blocos não poderiam gerar confusão nos alunos na hora de realizarem empilhamentos com os bloquinhos.

Para Wanderley (2019), durante o planejamento colaborativo, os professores puderam experimentar e refletir sobre as propriedades do conteúdo de volume. Nesse ínterim, o grupo se convenceu da necessidade de desenvolvimento de atividades de comparação, medição e produção, além de promoção da dissociação e articulação dos quadros geométrico, numérico e de grandezas, para que os estudantes compreendessem volume como uma grandeza e se apropriassem de seu conceito. Wanderley (2019) sugeriu que futuras edições sobre planejamentos de aulas de volume, sejam acrescentadas atividades que envolvam o uso de unidades de medida diferentes, uso de unidade padronizada de volume, bem como o estabelecimento da relação entre volume e capacidade.

### **À guisa de conclusão**

As formas planas, espaciais e analíticas estão presentes na natureza e seus estudos auxiliam na resolução de problemas dentro e fora da Matemática. Especificamente, a compreensão do volume de sólidos geométricos é necessária para desenvolvimento do raciocínio espacial presente em diferentes eixos científicos. Essa capilaridade e importância nos levou ao olhar sobre seu ensino, vez que educadores matemáticos vêm afirmando dificuldades de professores e alunos na apreensão conceitual desses objetos geométricos. Assim, nos propusemos a verificar estratégias de ensino de volume de sólidos geométricos recomendadas, experimentadas ou praticadas pela comunidade científica da Educação Matemática em um estudo revisional, a partir de 1998 - ano de publicação dos PCN, documento que oficializou o estudo de Grandezas e Medidas para os currículos escolares brasileiros.



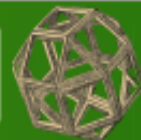
A revisão sistemática trouxe 12 trabalhos científicos que atenderam ao desenho protocolar. Após leitura integral, os 12 trabalhos foram reunidos em quatro categorias: (1) Softwares Matemáticos; (2) Resolução de Problemas; (3) Atividades e; (4) Materiais Manipulativos. Com relação aos softwares matemáticos, os pesquisadores demonstraram que o Geogebra pode ser um aliado nas didáticas inovadoras e em contextos culturais. Esse software enriqueceu o ensino, promovendo aprendizagem dos conceitos geométricos planejados. Como resultado, proporcionou aos estudantes um entendimento matemático que possa habilitá-los às futuras aplicações em contextos que sejam demandados.

No campo da resolução de problemas, as pesquisas oportunizaram aos estudantes diversidade de estratégias de solução para o mesmo problema. Apesar desse benefício, muitos alunos apresentaram dificuldades específicas para cálculos matemáticos, a exemplo da determinação correta do volume de um prisma retangular. Outros estudantes se apoiaram em procedimentos matemáticos memorizados, dificultando, assim, compreensões necessárias para resolução dos problemas propostos.

Quanto ao ensino por atividades, a sequência didática proposta pôde melhorar o ensino, com consequências benéficas para a aprendizagem de Geometria, especificamente no cálculo de volumes. Por fim, o trabalho com materiais manipulativos levou alguns autores a concluírem pela necessidade de desenvolvimento de atividades de comparação, medição e produção, além da promoção da dissociação e articulação dos quadros geométrico, numérico e de grandezas, para que os estudantes compreendessem volume como uma grandeza e se apropriassem de seu conceito. Essas atividades foram qualificadas como tarefas de desempenho autêntico, porque se constituíram como problemas do mundo real, por serem definidos dentro de um contexto de restrições e possibilidades realistas. Para além dessa perspectiva, a manipulação exigiu que os estudantes empregassem habilidades de pensamento de ordem superior, facilitando a compreensão e justificação dos cálculos de áreas e volumes, além de promover desenvolvimento de habilidades de leitura e interpretação de problemas.

## **Agradecimentos**

Agradecemos o apoio financeiro da Universidade Aberta Capixaba - UNAC - ao primeiro autor para realização deste trabalho que é parte dos estudos de doutoramento em Educação Matemática.



## Referências bibliográficas

BARROS, Renata Camargo dos Passos; PAVANELLO, Regina Maria. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 15, n. 1, p. 11-19, 2022.

BAZZO, Walter Antônio; PEREIRA, Luis Teixeira do Vale. **Introdução à Engenharia**: conceitos, ferramentas e comportamentos. Florianópolis: UFSC, 2006.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; BIBIANO, Marta Fernanda de Araújo; SOUZA, Cristiane Fernandes de. Estudar grandezas e medidas na Educação Básica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 9, n. 1, p. 1-16, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/234920>. Acesso em: 18 jul. 2024.

BERTOLI, Vaniela. **Ilhas interdisciplinares de racionalidade aplicado ao ensino de área e volume no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - Universidade Regional de Blumenau, Centro de Ciências Exatas e Naturais, Blumenau, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (Terceira Versão). Ministério da Educação, Brasília: MEC, 2016. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_publicacao.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf). Acesso em: 18 jul. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2024.

COUTINHO JÚNIOR, Francisco Raimundo. **Volumes de sólidos geométricos**: uma proposta de ensino com o auxílio do software Geogebra. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro-BA, 2018.

DARELA, Eliane; CARDOSO, Marleide Coan; ROSA, Rosana Camilo da. **História da Matemática**: livro didático. Palhoça: UnisulVirtual, 2011.





EVES, Howard. **Geometria**: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

FIGUEIREDO, Ana Paula Nunes Braz. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do Ensino Médio**: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em educação Matemática e tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

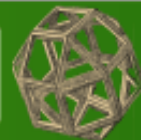
FISCHER, Marlise; GOULART, Grace Kelly Souza Carmo; GOULART, Claudiney. Ensinando Matemática Através De Atividades Lúdicas. **Revista Eletrônica de Educação do Curso de Pedagogia do Campus Avançado de Jataí da Universidade Federal de Goiás**, Itinerarius Reflectionis, v. 1, n. 2, 2006. DOI: 10.5216/rir. v1i2.187. Disponível em: <https://revistas.ufj.edu.br/rir/article/view/20326>. Acesso em: 18 jul. 2024.

GAMA, Maria Solange dos Santos. **Formulação e resolução de problemas sobre volume e capacidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências, Recife, 2023.

GRANDO, Regina Célia; NACARATO, Adair Mendes; GONÇALVES, Luci Mara Gotardo. **Compartilhando saberes em geometria**: investigando e aprendendo com nossos alunos. Cadernos CEDES, Campinas, v. 28, n. 74, p. 39-56, 2008.

LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, J. B. P. F.(coord.). **Matemática**: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, v. 17, p. 167-200, 2010.

MANSUR, Daniel Redinz; ALTOÉ, Renan Oliveira. BUSCad: uma ferramenta tecnológica de importação e tratamento de dados em revisão de literatura de pesquisas em educação matemática. In: BAIRRAL, M. A.; MENEZES, R. O. **Elaboração e mapeamento de pesquisas com tecnologias**: olhares e possibilidades. Porto Alegre: Fi, 2023, p. 260-292. Acesso ao livro: <https://www.editorafi.org/ebook/677-olhares-possibilidades>



MELLO, Luanda Firme de. **Formação do conceito de área e perímetro a partir de aulas baseadas no modelo Lesson Study**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

MILES, Victoria L. Maximizing volume with solids and nets. **Magazine mathematics teaching in the middle school**, v. 20, n. 4, p. 247-251, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.5951/mathteacmidscho.20.4.0247>. Acesso em: 12 jul. 2024.

MORAES, Ideny Espírito Santo Queiros. **O ensino de volume de sólidos geométricos por atividades**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

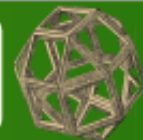
NURSYAHIDAH, Farida; ALBAB, Irkham Ulil. Learning Design on surface area and volume of cylinder using Indonesian Ethno-mathematics of Traditional Cookie maker assisted by GeoGebra. **Mathematics Teaching Research Journal**, v. 13, n. 4 - winter, Indonésia, 2021. ISSN # 2573-4377.

PAVANELLO, Regina Maria. Geometria: atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. In: I SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2001, Curitiba. **Anais [...]**, Curitiba, 2001, p. 172-183, 2001.

RODRIGUES, Simone Souza. **Problemas de maximização de área e volume aplicado ao ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática), Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, Teotônio Vieira da Silva. **Áreas de figuras planas e volumes envolvendo sólidos geométricos, uma abordagem conceitual e aplicada**. Dissertação (Mestrado em Matemática), Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, 2019.

SOUZA, Jaibis Freitas de. **Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Agrícola), Programa de Pós-graduação em Educação Agrícola – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2009.



TEKİN-SITRAVA, Reyhan; ISIKSAL-BOSTAN, Mine. **An investigation into the performance, solution strategies and difficulties in middle school students' calculation of the volume of a rectangular prism.** İstanbul: Aydın University, 2014. ISSN: ISSN-1473-0111.

TORRES, Nara Cristina Moreira. **Aprendizagem baseada em projetos: o uso da geometria na construção de um espaço de lazer na comunidade escolar.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT), Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2024.

VIANA, Odaléa Aparecida. **O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceitos.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Campinas - UNICAMP, SP, 2000.

WALLE, Jonh Van de. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WANDERLEY, Roger Artur Jähring. **Algumas contribuições do Lesson Study para a formação do professor de matemática em aulas que promovam a construção do conceito de volume.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Cefor, 2019.