EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS*: *Pesquisa em Educação Matemática.
ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

PROCESSOS COGNITIVOS DE SEGMENTAÇÃO E DE RECONTEXTUALIZAÇÃO NA APRENDIZAGEM DO MOVIMENTO DE ARREMESSO VERTICAL/QUEDA LIVRE

COGNITIVE PROCESSES OF SEGMENTATION AND RECONTEXTUALISATION IN LEARNING THE VERTICAL THROW/FREE FALL MOVEMENT

Méricles Thadeu Moretti[1]

Resumo:
Duval, em seu livro mais importante publicado em 1995, sobre a sua teoria semiocognitiva de aprendizagem intelectual, traz um estudo bastante completo sobre a compreensão de texto, tema importante para qualquer disciplina; na matemática, por exemplo, a compreensão do enunciado de problemas, teoremas, definições são partes integrantes da sua aprendizagem; esse autor procurou identificar e relacionar entre si as unidades significantes no registro em língua natural por meio de dois procedimentos cognitivos denominados segmentação e recontextualização. As unidades significantes são importantes na formação e nas operações relacionadas aos registros de representação semiótica; esses procedimentos, que procuram ressaltar as unidades significantes, apontam perspectivas didáticas, como essa que se pretendeu nesse estudo: considerar os registros algébrico e cartesiano como base das operações cognitivas de segmentação e recontextualização. Na compreensão de texto, além da variável associada à organização, há outra pertinente ao conteúdo cognitivo que é o que o texto procura veicular: nesse trabalho, escolheu-se para esse fim um caso regido pelas equações do movimento retilíneo uniformemente variado - arremesso vertical/queda livre. Deste modo, elaborou-se um estudo em que as representações algébricas e cartesianas são coordenadas para subsidiar a compreensão desse movimento a partir dos processos cognitivos de segmentação e recontextualização.

Palavras-chave: unidades significantes; segmentação cognitiva; recontextualização cognitiva; movimento de arremesso vertical/queda livre; aprendizagem científica

Abstract:
Duval, in his most important book published in 1995, on his semiocognitive theory of intellectual learning, provides a very comprehensive study of text comprehension, an important subject for any discipline; in mathematics, for example, understanding the wording of problems, theorems and definitions are integral parts of learning; this author sought to identify and relate the significant units in the natural language register to each other using two cognitive procedures called segmentation and recontextualisation. The significant units are important in the formation and operations related to the semiotic representation registers; these procedures, which seek to highlight the significant units, point to didactic perspectives, such as the one intended in this study: to consider the algebraic and Cartesian registers as the basis for the cognitive operations of segmentation and recontextualisation. In text comprehension, in addition to the variable associated with organisation, there is another pertinent to cognitive content, which is what the text seeks to convey: in this work, a case governed by the equations of uniformly varied rectilinear motion - vertical throw/free fall - was chosen for this purpose. In this way, a study was carried out in which algebraic and Cartesian representations are coordinated to help understand this movement based on the cognitive processes of segmentation and recontextualisation.

Key words: meaningful units; cognitive segmentation; cognitive recontextualisation; vertical throwing movement/free fall; scientific learning

[1] Doutor em Didática da Matemática/Unistra. PPGECT/UFSC, mthmoretti@gmail.com, Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

INTRODUÇÃO

A integração de conteúdos de diferentes áreas é um tema que desperta muito interesse, é parte desejável de projetos pedagógicos de cursos. É o caso, por exemplo, IFC (2024) - Projeto Pedagógico de Curso de Educação Profissional Técnica de Nível Médio que prevê no mínimo 15% de conteúdos de integração:

> Além da intersecção, poderão ser realizadas atividades de integração entre as disciplinas do núcleo básico e entre as disciplinas do núcleo técnico, devendo estas, estarem previstas nos respectivos planos de ensino, com o conteúdo a ser trabalhado, a carga horária disponível, avaliações integradas e os componentes curriculares envolvidos (p. 41).

No que segue, elaboramos um estudo para integrar noções relacionadas aos conteúdos de representação cartesiana e representação algébrica na aprendizagem da noção de um caso do movimento retilíneo uniformemente variado - arremesso vertical/queda livre (AV/QL); e para isso tomamos ideias de Duval (1995, 2004a)[2] relacionadas à compreensão de texto.

Duval (1995, 2004a) concebe **dois parâmetros constitutivos em situação de leitura e compreensão de um texto**: o primeiro parâmetro é relativo à **organização redacional** do texto, e o segundo refere-se ao **conteúdo cognitivo**, o que o texto pretende comunicar:

> A distinção entre esses dois níveis permitirá definir as **variáveis redacionais** de um texto, quer dizer, as variáveis relativas à relação entre esses dois níveis: a organização e aos modos de explicação redacional do conteúdo cognitivo (DUVAL, 1995, p. 326; 2004a, p. 280).

No **processo didático de compreensão de texto**, Duval (1995, 2004a) atribui duas operações cognitivas que se complementam: "a **segmentação do texto** em unidades e a **reconstituição das unidades segmentadas**." (p. 338; p. 289). Esses dois processos são comparados no Quadro 1 a seguir.

O processo "indutivo" de compreensão é intrinsicamente ligado à linguagem natural, atua diretamente sobre o texto: se vale de funções discursivas e é independente do conteúdo cognitivo. Já o processo "dedutivo" de compreensão permite uma certa margem no nosso propósito de considerar o sistema de representação algébrico, associado

[2] Em Duval (1995, 2004a), os anos referem-se à versão em francês de 1995 e em espanhol de 2004.

ao sistema de representação cartesiana, como base de um tipo de segmentação e recontextualização sobre o conteúdo cognitivo do movimento de arremesso vertical/queda livre que pretendemos estudar, por duas razões principais: a segmentação cognitiva "Efetua-se a partir de uma lista de questões, a resposta a cada questão delimita uma unidade de informação textual que deve ser procurada no texto" (DUVAL, 1995, p. 340).

Quadro 1: comparação dos dois processos de compreensão de texto

Processo "indutivo" de compreensão	**Processo "dedutivo de" compreensão**
1 Segmentação funcional: As unidades são determinadas em relação às funções discursivas (referencial, apofântica e metalinguística). O texto em sua totalidade de suas construções e de suas marcas sintáxicas é levado em conta. *Esta forma de segmentação, diferente da segmentação visual da forma escrita do texto*, é **sistemática** e **independente do conteúdo cognitivo**.	**1 Segmentação cognitiva**: As unidades são determinadas como elementos de respostas a uma grade de questões. Esta resposta pode ser constituída por uma palavra, um sintagma ou uma frase. A resposta pode não ser encontrada no texto. Não é necessário entrar no detalhe da construção sintáxica de cada frase. Procedimentos visuais de reconhecimento por *matching* com as questões ou por complementação associativa podem ser suficientes. *Esta forma de segmentação é* **seletiva** e **depende** do *conteúdo cognitivo*.
2 Recontextualização redacional: As diferentes relações que cada unidade discriminada pode ter relação com as outras discriminadas são explicitadas entre as expressões, e as ligações discursivas marcadas por conectores argumentativos ou temporais. *Esta forma de recontextualização* **é seletiva**. Ela **depende de um postulado de conectividade textual** *segundo a qual cada frase tem, ao menos, uma ligação interna ou externa com uma outra frase do texto* (Duval, 1986, p. 76 – 78)[3]	**2 recontextualização cognitiva**: As unidades discriminadas são integradas em uma organização de conhecimentos relativos ao "mundo" descrito e evocado no texto. Para que a recontextualização cognitiva seja possível, esta organização deve desde já partir da base de conhecimento do leitor. *Esta forma de recontextualização* é **sistemática**. **Ela** é **independente da organização redacional**.

Fonte: Duval, 1995, p. 345; 2004a, p. 295

Conforme se pode desprender do Quadro 1, a segmentação cognitiva é seletiva e depende do conteúdo cognitivo, ou seja, cada conteúdo cognitivo mobilizado sugere tipos diferentes de segmentação.

Sobre a recontextualização cognitiva, Duval considera que:

> Não é suficiente poder discriminar todas as unidades de informação que são explicitamente mobilizadas no texto, é preciso também apreender

[3] DUVAL, R. Lecture et compréhension des textes. Strasbourg: IREM, 1986.

> as conexões que as ligam em sua totalidade (DUVAL, 1995, p. 342, 2004a, p. 292).

Em suma, a segmentação cognitiva destaca as unidades redacionais enquanto a recontextualização cognitiva as integra em uma organização de conhecimentos descritos e evocados no texto.

Esse processo de segmentação cognitiva aliada ao processo de recontextualização cognitiva visa:

- destacar as variáveis redacionais no registro da língua natural, que no caso do registro de uma forma geral, as variáveis redacionais correspondem às **unidades significantes**;
- estabelecer uma **relação com essas unidades significantes** no interior do registro da língua natural ou com outros registros. Como foi o caso do exemplo tratado em Moretti (2022):

> João tinha um certo número de bolinhas de gude, jogou uma primeira partida e perdeu 5 bolinhas. Na segunda partida ele ganhou 7. Agora ele tem 10 bolinhas. Com quantas bolinhas ele começou a jogar?

As questões precisam se referir às unidades informacionais, para que o aluno possa levar em conta na solução a ser apresentada, como por exemplo:

(Q1) Quantas partidas de bolinha de gude João jogou?

(Q2) João, na primeira partida, ganhou ou perdeu? Quantas bolinhas?

(Q3) Na segunda partida ele ganhou ou perdeu? Quantas bolinhas?

(Q4) Se ele perdeu 5 na primeira partida, mas ganhou 7 na segunda partida, ele saiu ganhando ou perdendo? Quantas bolinhas?

(Q5) Se agora, depois da segunda partida, ele tem 10 bolinhas, quando ele começou a primeira partida ele tinha mais ou menos do que 10 bolinhas?

(Q6) Preencher a tabela a seguir conforme enunciado do problema:

Início	1ª partida	2ª partida	Final
____	_____	_____	_____

A questão Q1 destaca o número de partidas; Q2 chama a atenção para o que ocorreu na primeira partida, enquanto Q2 se refere ao que ocorreu na segunda partida; as questões Q4 e Q5 são questões de recontextualização cognitiva, pois remetem a uma associação de mais de uma unidade informacional (unidade significante). Q6 é uma

ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

questão de recontextualização global em um outro tipo de representação, a representação tabular.

O exemplo apresentado das bolinhas de gude mostra que a segmentação e recontextualização são exercidas em língua natural, que foi o registro fundante do estudo de Duval (1995, 2004a) quando tratou da compreensão de texto. Com base nesse estudo, imaginou-se um processo da segmentação cognitiva e de recontextualização cognitiva no sistema de escrita algébrica associado ao sistema gráfico cartesiano tomando como conteúdo cognitivo o estudo do arremesso vertical/queda livre (AV/QL); o objetivo é o mesmo em relação ao estudo de Duval (1995, 2004a) sobre esses dois processos na compreensão de texto: identificar as unidades significantes (processo de segmentação cognitiva) e suas relações (processo de recontextualização cognitiva) na aprendizagem do AV/QL; é o que se pretendeu ao expor o que segue.

Procuramos analisar esses dois processos cognitivos na compreensão do sistema de escrita algébrica e sistema gráfico cartesiano a partir do seguinte problema:

> **Problema do salto da pulga** (adaptado de BATSCHELET, 1978, p. 276)[4].
>
> Uma pulga saltando na direção vertical alcançou a altura h (em metros) como uma função do tempo t (em segundos): $h(t) = 2t - 5t^2$. Calcular a velocidade no tempo $t = 0$, a altura máxima alcançada, e a aceleração causada pela gravidade.

A organização gráfico cartesiana é essencialmente convencional: o eixo das abscissas, no caso é representado pela variável tempo, transcorre no sentido da esquerda para a direita; o eixo das ordenadas, que representa o deslocamento da pulga, cresce verticalmente de baixo para cima; a origem do sistema de coordenadas está localizada nas coordenadas (0, 0); um ponto qualquer desse sistema gráfico cartesiano, é representado por um par ordenado em que o primeiro termo é ocupado pela variável independente tempo, e o segundo elemento do par, é a distância: ambos tomados à partir da origem do sistema. Para a altura h, apenas o primeiro quadrante é utilizado, já para a velocidade, o primeiro e quarto quadrantes uma vez que a velocidade negativa tem sentido físico.

[4] Esse autor utiliza, nesse exercício, a equação $h(t) = 4{,}4t - 4{,}9t^2$, o que atribui à pulga a velocidade inicial no salto de 4,4m/s, e a altura máxima alcançada chegaria a quase um metro. Com a equação proposta, a altura máxima alcançada vai ser aproximadamente 20 cm, bem mais próxima da realidade da literatura sobre o assunto. De qualquer forma é algo que pode ensejar, pelos alunos, uma pesquisa na literatura sobre o assunto.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: *Pesquisa em Educação Matemática.*
ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

Em relação ao conteúdo cognitivo - AV/QL - a equação que representa o movimento é uma equação quadrática em que a taxa de variação para qualquer tempo do movimento é dada por uma equação de uma reta que representa a velocidade; a taxa de variação da velocidade é a aceleração da gravidade. No AV/QL despreza-se o atrito do ar e é regido pelas equações do movimento retilíneo uniformemente variável.

1 - DISCRIMINAR AS UNIDADES SIGNIFICANTES EM CADA REGISTRO: QUAL É A IMPORTÂNCIA?

A discriminação das unidades significantes é condição necessária à aprendizagem intelectual na teoria semiocognitiva de Duval (1995, 2004a) que se vale da noção de registro de representação semiótica (RRS); é um sistema de representações semióticas que apresenta três atividades cognitivas fundamentais:

- formação. O registro funda-se a partir de um conjunto de representações que possuem regras próprias na sua constituição. Essas regras precisam estar explícitas para que um grupo de pessoas possa compartilhá-las. É o que acontece, por exemplo, com o RRS da língua natural;
- tratamento. Um RRS precisa ao menos uma operação interna, operação sobre as representações do registro e que produz uma nova representação no mesmo registro. Assemelha-se ao que, em matemática, se chama de propriedade de fechamento. É o que acontece, por exemplo, com a paráfrase e a perífrase entre outras operações na língua natural;
- conversão. As representações em um RRS devem poder ser transformadas em outro RRS, é uma operação entre dois registros. Um problema enunciado em língua natural, pode ser transformado em uma expressão algébrica, como por exemplo, o problema seguinte: Francisco tem quatro anos a mais do que Mariana. Mariana e Francisco têm juntos 18 anos. Determinar as idades de Francisco e Mariana. A resolução desse problema em língua natural transforma-se na resolução do sistema de equação $F - 4 = M$ e $F + M = 18$.

A criação de novos RRS está intimamente ligada ao desenvolvimento científico, como foram os casos da invenção do microscópio na biologia que proporcionou acesso direto a um certo tipo de objeto e da introdução do sistema cartesiano por Descartes; ambas as criações permitiram a produção de novos registros. A diversidade de registros é

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS*: *Pesquisa em Educação Matemática.
ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

muito grande, o que nos permite uma certa margem de manobra em atividades de aprendizagem que se quer implementar.

Duval (1999, p. 37) considera quatro grandes grupos de registros (RRS):

– Grupo 1. **Língua natural** com os tratamentos: associações verbais (conceituais), descrição, definição, explicação, raciocínio, argumentação a partir de observações de crenças, deduções válidas a partir de definições ou de teoremas;

– Grupo 2. **Figuras geométricas** planas ou em perspectiva com os tratamentos: apreensão operatórias e não somente perceptiva, construção com instrumentos, modelização de estruturas físicas (cristas, moléculas etc.);

– Grupo 3. **Sistema de escrita** numérica, binária, fracionária, algébrica, simbólica (línguas formais), com os tratamentos de cálculo literal, algébrico e formal;

– Grupo 4. **Gráfico cartesianos** (visualização de variações) com os tratamentos: mudança de sistemas de coordenadas, interpolação, extrapolação.

A linguagem natural é a mais importante de todos os registros, está presente em qualquer atividade de aprendizagem. No nosso caso, no estudo do AV/QL adentrou-se no universo do: Grupo 1 (língua natural) quando o problema é enunciado ou respostas em língua natural são exigidas; Grupo 3 (Sistema de escrita algébrica) quando as equações algébricas são apresentadas e, eventualmente, obtidas e; Grupo 4 no momento da apresentação ou elaboração dos gráficos cartesianos; e de certo modo, o Grupo 2, das figuras geométricas também estão presentes nas figuras do sistema cartesiano de representação. A esses grupos, une-se o objeto de estudo, o AV/QL.

- Aprendizagem intelectual segundo Duval

O esquema de aprendizagem em Duval, pressupõe a coordenação de ao menos dois RRS; a esses dois registros acrescentamos o objeto: no caso do estudo do AV/QL, o registro algébrico (representação das equações do movimento), o registro gráfico cartesiano (representações gráficas da parábola e da reta), conforme mostra o esquema de aprendizagem da Figura 1 a seguir:

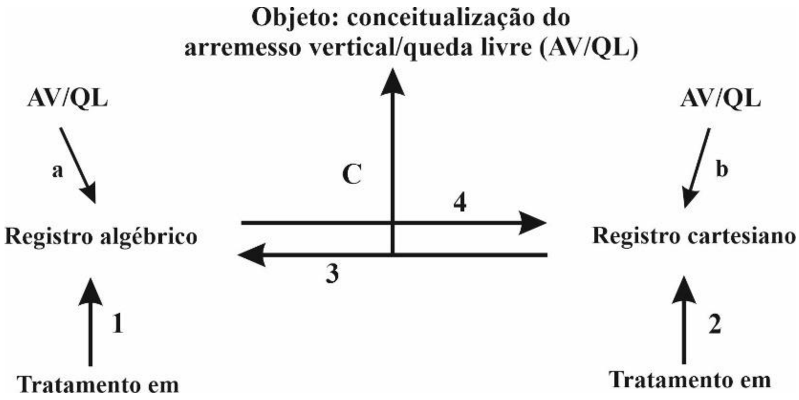
- o AV/QL é o objeto principal de aprendizagem;
- as setas 1 e 2 indicam os tratamentos em cada registro;
- as setas “a” e “b” indicam elementos conceituais do AV/QL relacionados aos registros algébrico e gráfico cartesiano; e as setas 3 e 4 indicam conversões entre os registros

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: *Pesquisa em Educação Matemática.*
ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

algébrico e cartesiano de forma coordenada, que é a condição necessária para que aconteça a aprendizagem integrativa (seta C).

A possibilidade de conversões coordenadas entre os registros algébrico e cartesiano, está intimamente ligada ao procedimento no esboço das curvas conforme discussão que apresentaremos mais adiante.

Figura 1: Esquema de aprendizagem semiocognitiva integrativa



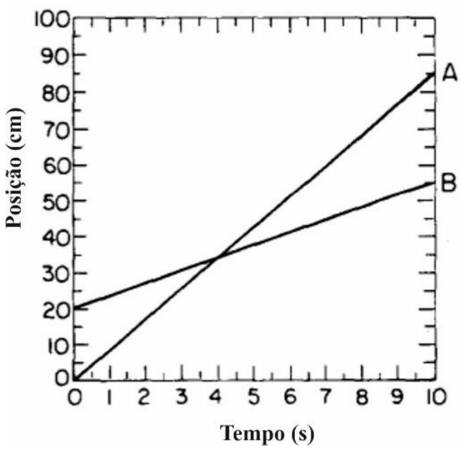
Fonte: adaptado de Duval, 1995, p. 67; 2004a, p. 68 para o caso do movimento de arremesso vertical/queda livre

As transformações de representações de um mesmo objeto que acontecem nas operações de tratamento e, principalmente nas conversões, trazem à tona um fenômeno semiocognitivo que Duval denomina de congruência semântica que atenta para o grau de transparência que há entre representações do mesmo objeto:

> O problema da congruência ou da não congruência semântica de duas representações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva entre essas duas representações sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro. Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo da passagem de uma representação a outra corre o risco de ser elevado e não ser efetuado ou entendido (Duval, 2012, p. 105).

O problema, a seguir, de McDermott *et al* (1987, p. 504) exemplifica essa situação:

A figura ao lado mostra a posição versus tempo para o movimento de dois objetos A e B.
(a) No instante t = 2s a velocidade do objeto A é maior, menor ou igual a velocidade do objeto B? Explique a tua resposta.
(b) Em algum momento os objetos A e B possuem a mesma velocidade? Caso afirmativo, em qual tempo. Explique a tua resposta.



Sobre as respostas ao item (a) desse problema, McDermott *et al* comentam:

> No instante t = 2s, a linha B está acima da linha A, e muitos estudantes se prendem a essa diferença de altura no lugar da diferença de inclinação para determinar qual objeto tem maior velocidade (1987, p. 504).

Em relação ao item (b) desse mesmo problema McDermott *et al* ressaltam:

> Os estudantes que responderam de forma incorreta ao item (b) da questão, não se deram conta de que os objetos A e B jamais terão a mesma velocidade. No entanto, escolhem *t = 4s*, o ponto de intersecção no qual as linhas têm a mesma altura, para o tempo em que as velocidades são a mesma. Mais uma vez, parece que muitos alunos usam o recurso errado no gráfico para chegar à resposta (1987, p. 504).

Esses autores comentam ainda que "é possível que muitos dos alunos que perceberam, de forma correta, que no tempo *t = 4s* os objetos A e B estão na mesma posição, mas inferem, de forma incorreta sobre a velocidade dos objetos A e B." (McDermott *et al*, 1987, p. 504).

As respostas produzidas nas questões feitas no caso do problema de McDermott *et al* (1987) mostram casos de não congruência semântica, por essa razão é uma noção semiocognitiva imprescindível na compreensão das dificuldades dos alunos na resolução de problemas.

O problema das idades de Francisco e Mariana apresentado anteriormente, também exibe um outro caso de não congruência semântica entre a frase "Francisco tem quatro anos a mais do que Mariana" e a expressão algébrica correspondente "F – 4 = M" por conta do termo "tem a mais" que não corresponde, na equação, a expressão em língua natural; já a expressão "F + 4 = M" tem congruência semântica com a expressão em língua natural, mas não mantém a equivalência referencial, ou seja, não preserva o valor verdade.

ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

Em suma, para a resolução do problema, o que cabe é o sistema de equações lineares "F – 4 = M e F + M = 18" que mantém a equivalência referencial com o enunciado em língua natural.

2 - ESBOÇO DE CURVAS: RECONSTITUIÇÃO DAS UNIDADES SIGNIFICANTES

Duval (2011) apresenta um estudo que trata da possibilidade do esboço de curvas de modo que os elementos significantes tanto na equação quanto no gráfico possam estar relacionados de forma coordenada: processos que ressaltam as unidades significantes e que possibilitam a segmentação e a recontextualização; o estudo tratou do caso da reta e da equação cartesiana da reta $y = ax + b$.

Nesse estudo, Duval (2011) relaciona elementos visuais no sistema cartesiano com os parâmetros a e b da equação de primeiro grau, conforme se pode constatar no quadro a seguir.

Quadro 2: Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	Acrescenta-se uma constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval, 2011, p. 100

A relação entre os elementos significantes no registro algébrico e no registro cartesiano é elaborada estritamente do ponto de vista matemático: algumas variações possíveis qualitativas dos parâmetros a e b e variações correspondentes visuais no plano cartesiano. As variáveis x e y não possuem algum significado específico, como pode ser, por exemplo, representar a velocidade no AV/QL. Duval (2011) nomeia esse modo de analisar ou esboçar curva como um **procedimento de interpretação global das propriedades figurais**, procedimento que permite a articulação com outro registro de representação.

Duval apresenta três modos de ver os gráficos cartesiano:

ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

> (1) a **percepção-leitura**. Apreensão local por pontos. Para construir o gráfico cartesiano, ponto de interseção/par ordenado;
> (2) a **percepção icônica**, imagem esquemática de uma "tendência". Estimula uma analogia em um espaço físico de dimensão 3 (estar mais alto, mais baixo), relevo do solo.
> (3) **visualização matemática**. Discriminação qualitativa das características figurais que distinguem dois gráficos de mesma forma ou não. Mobiliza correspondência com as características semânticas da ESCRITA simbólica de uma relação (funcional ou não) entre duas variáveis (DUVAL, 1999, p. 50).

O terceiro modo de ver, conforme se pode desprender dessa citação, é possibilitado pelo procedimento de interpretação global das propriedades figurais, ou simplesmente, **procedimento global qualitativo** que trata de discriminar **as unidades significantes dos gráficos** em correspondência com as **unidades significantes semânticas da escrita algébrica**. Já o primeiro modo, bastante presente nos livros didáticos, o procedimento percepção-leitura favorecido pelo procedimento ponto a ponto de esboço uma vez que parte de uma relação de pontos que são localizados no plano cartesiano e o traçado da figura é feito juntando esses pontos. No caso da reta, em geral dois pontos são localizados no plano cartesiano para que, em seguida, a reta possa ser traçada unindo-os: a ideia é de que dois pontos não coincidentes determinam uma única reta.

Consideremos o seguinte exemplo: esboçar o gráfico de $y = 2x + 3$.

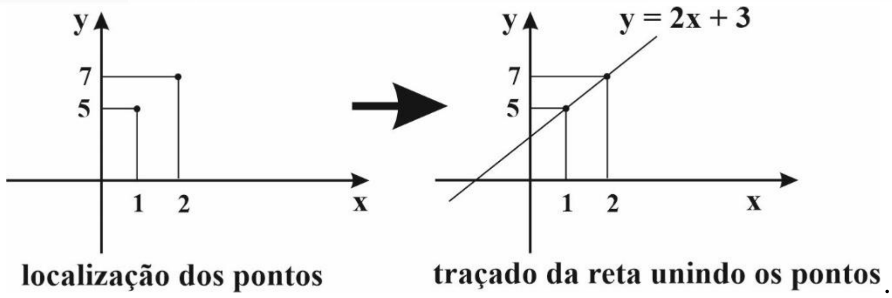
– procedimento ponto a ponto

Nesse procedimento, dois pontos quaisquer são determinados usando a expressão algébrica da reta conforme a tabela a seguir:

x	y
1	$y = 2\times1 + 3 = 5$
2	$y = 2\times2 + 3 = 7$

Após os pares ordenados serem localizados no plano cartesiano, a reta $y = 2x + 3$ é traçada conforme mostramos na figura a seguir:

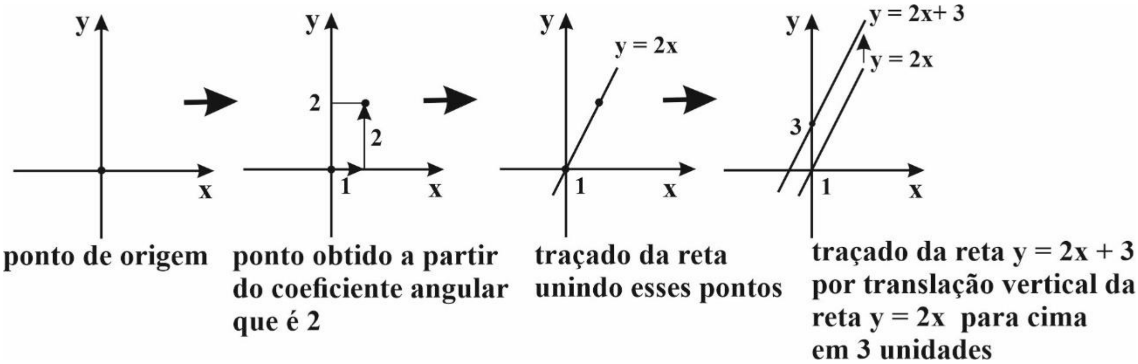
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: Pesquisa em Educação Matemática.
ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927



O primeiro passo foi localizar, no plano cartesiano, os pares ordenados calculados com a ajuda da equação da reta $y = 2x + 3$, para que, em seguida, os pontos encontrados fossem ligados formando a reta desejada.

– procedimento global qualitativo

O procedimento global qualitativo que iremos utilizar abaixo[5], para esboçar a reta $y = 2x + 3$, considera, inicialmente, a reta de equação $y = 2x$ que passa pela origem do sistema cartesiano e é paralela a reta de equação $y = 2x + 3$.



No procedimento ponto a ponto, os coeficientes da reta não exercem papel algum, a não ser no cálculo algébrico de cada par ordenado. Diferentemente do procedimento global qualitativo, os pontos são utilizados de modo a fortalecer a apreensão dos coeficientes angular (taxa de variação) e linear da reta.

A reta de equação $y = 2x + 3$ ou $y - 3 = 2x$ caracteriza uma reta que pode ser obtida por um processo de translação verticalmente para cima da reta de equação $y = 2x$ em 3 unidades. De um modo geral, qualquer reta de equação $y = ax + b$ (ou $y – b = ax$) pode

[5] Sobre esse assunto consultar: MORETTI, Méricles T. **A translação como recurso no esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais**. In MACHADO, Silvia D. A. de (org). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

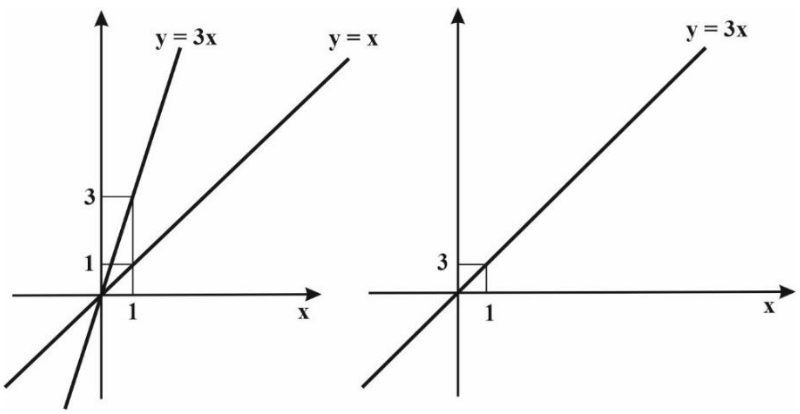
ser obtida por um processo de translação da reta $y = ax$ em b unidades: verticalmente para cima, no caso em que $b > 0$, e verticalmente para baixo para o caso em que $b < 0$: a translação vertical preserva o paralelismo das retas, ou seja, mantém o mesmo coeficiente angular da reta na origem do sistema e da reta transladada.

Em relação ao comentário de McDermott *et al* (1987) sobre as respostas dos alunos ao item (a) do Problema formulado por esses autores, Duval (1999, p. 52) ressalta que "Um aluno incapaz de discriminar as variáveis visuais pertinentes daquelas que não são pertinentes, só pode estar em um procedimento ponto a ponto...", procedimento esse que não ressalta o papel do coeficiente angular (inclinação da reta) e do coeficiente linear.

Os estudantes que erraram essa questão, são presos à apreensão perceptiva que mostra claramente a reta que representa o movimento do objeto B acima da reta representante do objeto do objeto A em $t = 2s$, e isso foi suficiente para afirmar que a velocidade de B é maior do que a do objeto A.

- Inclinação da reta, coeficiente angular e taxa de variação: qual designação escolher?

Os termos "inclinação da reta" e "coeficiente angular", fazem apelos visuais, remetem no plano cartesiano às variáveis visuais, ângulo ou inclinação em relação à abscissa no plano cartesiano, que pode se prestar ao equívoco. O exemplo, a seguir, é um pouco dessa situação:



As retas $y = 3x$, apresentadas nos dois gráficos, não possuem "visualmente" a mesma inclinação. Já a reta $y = x$ do gráfico à esquerda possui "a mesma inclinação" da reta $y = 3x$ do gráfico à direita, tudo isso por conta das unidades utilizadas nos eixos. Os termos "inclinação" e "coeficiente angular" nos remetem a uma variável visual, por esta razão preferimos usar o termo "taxa de variação" que sugere alguma relação entre duas quantidades como é o caso que veremos a seguir no AV/QL.

– procedimento global qualitativo para o caso da parábola

As equações quadráticas da forma $y = Ax^2 + Bx + C$, em que $A \neq 0$, B, C são constantes reais, produzem no plano cartesiano curvas denominadas parábolas. Os coeficientes A e C possuem significados puramente matemáticos, sendo que A indica a concavidade da parábola: caso $A > 0$ a concavidade é positiva (voltada para cima) e se $A < 0$, a concavidade é negativa (voltada para baixo). Isso é claro considerando-se os sentidos dos eixos da forma costumeira; C é a ordenada do ponto de intersecção com o eixo das ordenadas. Essas equações governam o AV/QL e, deste modo, o coeficiente B, assim como, os coeficientes A e C terão sentidos relacionados a esse movimento, que é o conteúdo cognitivo a ser tratado.

Há um outro elemento da parábola que é ponto de encontro de diversos sentidos, tanto físico quanto matemático; é o vértice da parábola. Toda parábola de equação $y = Ax^2 + Bx + C$ pode ser colocada na forma $y - y_{vp} = A(x - x_{vp})^2$, sendo (x_{vp}, y_{vp}) o vértice da parábola. Deste modo, a parábola será apresentada em duas equações equivalentes, mas que exibem sentidos que se complementam. Para o esboço global qualitativo da parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ consideramos a parábola na forma $y - y_{vp} = A(x - x_{vp})^2$ que significa que a parábola $y = Ax^2$ sofreu uma translação vertical para cima em y_{vp} unidades no caso em que $y_{vp} > 0$ ou vertical para baixo no caso em que $y_{vp} < 0$. Após esse movimento de translação vertical, a parábola sobre outra translação, mas dessa vez horizontal à direita no caso em que $x_{vp} > 0$ ou à esquerda no caso $x_{vp} < 0$. Deste modo, a parábola é obtida por dois movimentos de translação, um vertical e outro horizontal que dependem dos sinais das coordenadas do vértice. A seguir, um exemplo que ilustra essa situação.

Exemplo: esboçar o gráfico de $\boldsymbol{h(t) = 2t - 5t^2}$

A parábola de equação de $h(t) = 2t - 5t^2$ pode ser transformada na forma em que as coordenadas do vértice se tornam explícitas:

$$h = -5(t^2 - 0{,}4) \quad \leftrightarrow \quad h = -5[(t - 0{,}2)^2 - (0{,}2)^2] \leftrightarrow h = -5[(t - 0{,}2)^2 - 0{,}04]$$

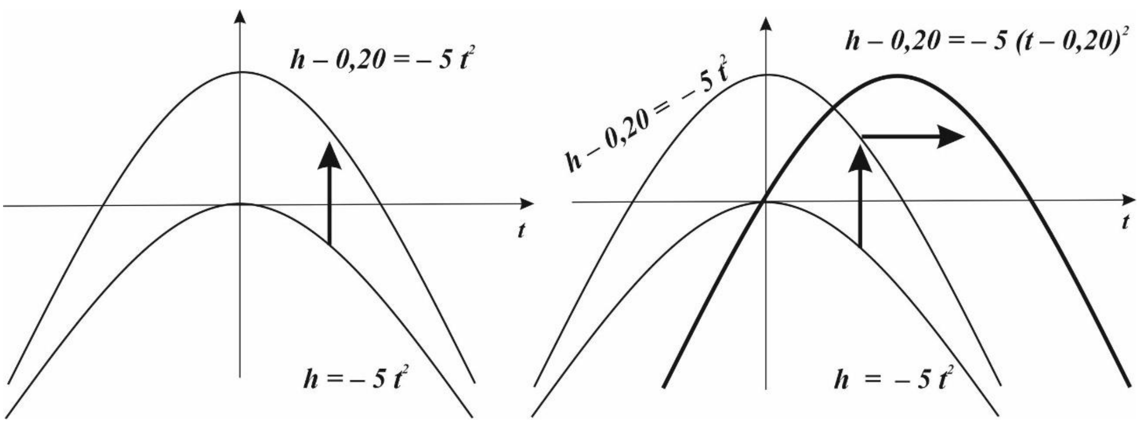
Assim, temos finalmente: $h - 0{,}20 = -5(t - 0{,}20)^2$.

ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

O que pode dizer é que a parábola de equações $h(t) = 2t - 5t^2$ ou $h - 0{,}20 = -5(t - 0{,}20)^2$ tem concavidade voltada para baixo, passa na origem do sistema e o vértice tem coordenadas *(0,20; 0,20)*. O gráfico será dado conforme desenho a seguir.

A Figura 2 à esquerda mostra que a parábola de equação $h = -5t^2$, com vértice localizado na origem, sofreu uma translação vertical para cima em *0,20m* e passou à equação $h - 0{,}20 = -5t^2$. Na figura a direita, essa parábola de equação $h - 0{,}20 = 5t^2$ sofreu uma translação horizontal à direita em *0,20s* e passou à equação do movimento $h - 0{,}20 = -5(t - 0{,}20)^2$.

Figura 2: Gráfico da parábola $h(t) = 2t - 5t^2$



Fonte: o autor

- Taxa média de variação e taxa instantânea de variação – a noção de infinitésimo

No caso da reta, as taxas de variação média e instantânea coincidem, mas o mesmo não acontece com a parábola, conforme veremos a seguir.

Seja a parábola $h(t) = At^2 + Bt + C$. A taxa média TX entre t_0 e $t_0 + m$, com $m>0$, vale:

$$TX(t_0, t_0 + m) = \frac{h(t_0 + m) - h(t_0)}{m}$$

$$TX(t_0, t_0 + m) = \frac{A(t_0 + m)^2 + B(t_0 + m) + C - [A(t_0)^2 + B(t_0) + C]}{m}$$

$$TX(t_0, t_0 + m) = \frac{A(m^2 + 2mt_0) + Bm}{m}$$

Na perspectiva de Thompson (1914), o cálculo pode ser abordado sem o uso da noção rigorosa de limite[6], o que permite definir certas noções ainda no ensino médio: o seu método infinitesimal de aproximação utiliza diferentes graus de "pequenez" de grandezas, ou seja, de valores pequenos de diferentes ordens:

> A reflexão deste autor é que, sendo uma quantidade que em si já é pequena, a quantidade pequena de 2ª ordem (ou 3ª, 4ª, ...) referente a ela, torna-se insignificante e em muitos cálculos é possível excluir estas quantidades pequenas de ordem superior. Ou seja, o cálculo infinitesimal de Thompson está baseado na ideia de desprezar somente infinitésimos de ordem superior a um (PASA, 2017, p. 126).

Além disso, a quantidade de ordem 1 é pequena, mas não é nula; o que permite que se possa simplificar. Assim,

$$TX(t_0) = \frac{A(m^2 + 2mt_0) + Bm}{m} = \frac{Am^2 + 2Amt_0 + Bm}{m} = \frac{m(2At_0 + B)}{m} = 2At_0 + B$$

A taxa obtida é a taxa de variação instantânea em t_0, que nada mais é do que a derivada de *h(t)* em t_0, e que representa a velocidade do AV/QL. A taxa de variação (média ou instantânea) da equação da velocidade representa a aceleração da gravidade $g = 2A$.

De forma genérica, obtemos quatro equações para o AV/QL relacionados ao Problema do salto da pulga a ser tratado:

$h = At^2 + v_0t + h_0$ $\quad [h(t) = 2t - 5t^2]$

$h - h_{vp} = A(t - t_{vp})^2$ $\quad [h - 0{,}20 = -5(t - 0{,}20)^2]$

$v = 2At + v_0$ $\quad [v = -10t + 2]$

$g = 2A$ $\quad [g = -10]$

em que:

o sinal de $A = -5$ indica a concavidade da parábola que é voltada para baixo;

$v_0 = 2$m/s representa a velocidade inicial do movimento;

(0,20s, 0,20m) é o vértice da parábola - extremo da parábola que representa a maior altura atingida pelo objeto no tempo *0,20s*;

$-10m/s^2$ é a aceleração.

[6] Para aprofundamentos sobre esse assunto, consultar PASA (2017).

O quadro seguir apresenta os elementos significantes nos registros da linguagem algébrica e gráfica associados o objeto de estudo que é o AV/QL:

Quadro 3: relação entre os vários significantes nos registros envolvidos.

AV/QL	Linguagem algébrica	Gráfico cartesiano/parábola
Lei do deslocamento	$h = At^2 + v_0t + h_0$ $h - h_{vp} = A(t - t_{vp})^2$ $h(0) = h_0$	Parábola "A" indica a concavidade; (t_{vp}, h_{vp}) é o vértice; Ponto $(0, h_0)$
Lei da velocidade Velocidade inicial	$v = 2At + v_0$ $v(0) = v_0$	Reta Ponto $(0, v_0)$
Aceleração	$g = 2A$	Reta constante

Fonte: do autor

Com base nesse quadro, faremos uma série de questões conforme orientação do processo "dedutivo" de compreensão e *matching* (ver Quadro 1) na aplicação da **segmentação cognitiva** e **recontextualização cognitiva** que inclui as questões presentes na formulação do Problema do salto da pulga apresentado anteriormente.

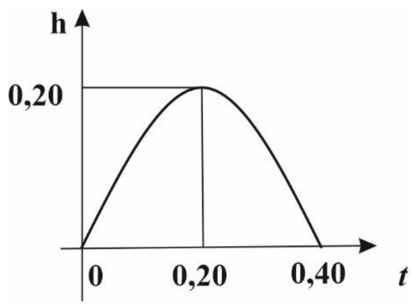
Roteiro de questões

1 – Como você classificaria a equação desse movimento?

2 – Qual é a curva que resulta dessa equação/movimento? Nomear alguns elementos importantes dessa curva e relacioná-los com elementos do Salto da pulga.

3 – Esboçar o gráfico de $h(t) = 2t - 5t^2$.

(Obs. O gráfico já foi feito anteriormente no processo global qualitativo, representa o salto da pulga).



Observando o gráfico, descrever com algumas palavras o que acontece com o salto da pulga?

4 – Qual é a altura máxima do salto da pulga? Em que ponto da curva acontece?

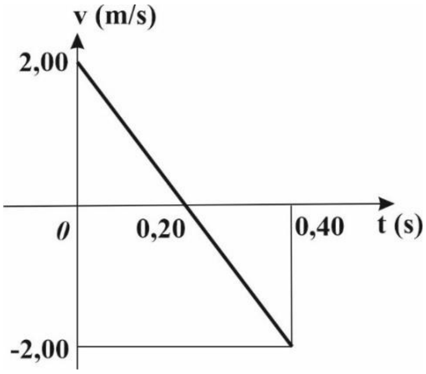
5 – Quanto tempo durou o salto da pulga?

6 – Determinar a expressão da velocidade da pulga nesse salto.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS*: *Pesquisa em Educação Matemática.
ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

7 – Fazer o gráfico da velocidade $v(t) = -10t + 2$ do salto da pulga.

(Obs. o gráfico ficaria conforme desenho a seguir).

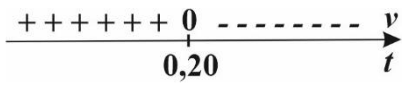


Associar *h* e *v* nos gráficos das Questões 3 e 5.

8 – É possível conhecer a velocidade inicial apenas observando a equação horária do movimento? (obs. $v(0) = 2a.0 + B = B$).

9 – Fazer um gráfico do sinal da velocidade.

(Obs. O gráfico a seguir mostra os sinais da velocidade).



O que acontece com a velocidade em *t = 0s*, *t = 0,20s* e em *t = 0,40s*? Nesses instantes, o que se pode dizer sobre *h*?

10 – Qual é o sentido físico da velocidade ser positiva ou negativa?

11 – A parábola é uma curva simétrica ortogonal em relação ao eixo vertical que passa pelo vértice. Qual é o significado dessa simetria em relação ao deslocamento *h* e a velocidade *v*?

12 – Qual é a taxa de variação da equação da velocidade? O que ela significa?

13 – Escrever uma “pequena história” que reproduza com fidelidade o salto da pulga sem esquecer de apontar os elementos seguintes: unidades utilizadas, início, chegada, tempo de duração, distância percorrida, distância máxima, velocidade, aceleração etc.

14 – Considerar, no salto da pulga, apenas o momento em que começa a cair, em queda livre, de uma altura *h= 0,20m*. Qual é a equação de *h* desse movimento? Qual é a equação da velocidade. Comparar essas equações obtidas com as equações já encontradas no Problema do salto da pulga. (Considerar que a altura é crescente debaixo para cima e $|g| = 10m/s^2$).

15 – O que mudaria na Questão 14 se no lugar de uma pulga fosse uma pedra de 1kg? Explicar a sua resposta.

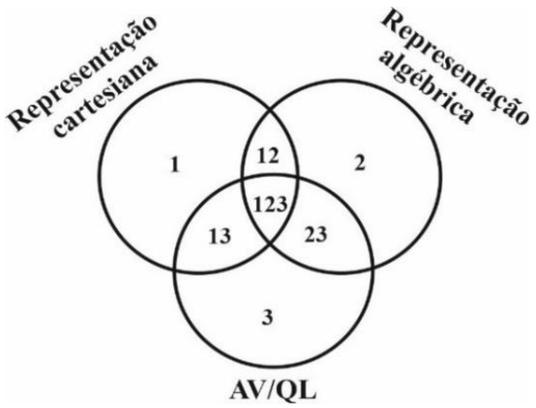
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: *Pesquisa em Educação Matemática.*
ISSN: 2596 -318X
DOI: 10.36661/2596-318X.2024v6n2.14927

16 – Usando as equações de h e v, deduzir a Equação de Torricelli ($v = v_0 + 2A\Delta h$). (Sugestão: isolar t na equação de v e o substitua na equação de h).

A segmentação cognitiva destaca as unidades significantes dos registros gráfico e algébrico que estão associados ao conteúdo cognitivo do AV/QL. A descontextualização cognitiva pode ser parcial, conforme mostramos no exemplo do Problema do salto da pulga, ou mais completa quando praticamente abrange grande parte dos elementos significantes considerados na segmentação cognitiva conforma mostra a figura e quadro a seguir.

A Figura 3 mostra que a segmentação e a recontextualização podem ser parciais, quando as questões abrangem as regiões 1, 2, 3, 12, 13 e 23; só é completamente abrangente no caso da região "123" quando os registros gráfico cartesiano e algébrico, além do conteúdo cognitivo, são englobados conforme quadro a seguir.

Figura 3: Segmentação cognitiva e recontextualização cognitiva abrangentes e parciais



Fonte: o autor

Quadro 4: Situação da segmentação cognitiva e recontextualização cognitiva abrangentes e parciais do Roteiro das Questões.

Roteiro de Questões	**Envolve** (ver Fig. 4)
1 – Como você classificaria a equação desse movimento?	23
2 – Qual é a curva que resulta dessa equação/movimento? Nomear alguns elementos importantes dessa curva.	123
3 – Esboçar o gráfico de $h(t) = 2{,}2t - 4{,}9t^2$	12
4 – Qual é a altura máxima do salto da pulga?	13
5 – Quanto tempo durou o salto da pulga?	123
6 – Determinar a expressão da velocidade da pulga nesse salto.	23
7 – Fazer o gráfico da velocidade $v(t) = -10t + 2$ do salto da pulga. Associar h e v nos gráficos das Questões 3 e 5.	123
8 –É possível conhecer a velocidade inicial apenas observando a equação do movimento?	23

9 – O que acontece com a velocidade em $t = 0s$, $t = 0{,}20s$ e em $t = 0{,}40s$? Nesses instantes, o que se pode dizer sobre h?	123
10 – Qual é o sentido físico de a velocidade ser positiva ou negativa?	23
11 – A parábola é uma curva simétrica em relação ao eixo vertical que passa pelo vértice. Qual é o significado dessa simetria em relação ao deslocamento h e a velocidade v?	123
12 - Qual é a taxa de variação da equação da velocidade? O que ela significa?	23
13 – Escrever uma "pequena história" que reproduza com fidelidade os movimentos dos objetos A e B, não esquecendo de apontar os elementos seguintes: unidades utilizadas, início, chegada, tempo de duração, distância percorrida, ponto de intersecção, taxa de variação-velocidade e taxa de variação-aceleração.	123
14 – Considerar, no salto da pulga, apenas o momento em que começa a cair, em queda livre, de uma altura $h = 0{,}20m$. Qual é a equação de h desse movimento? Qual é a equação da velocidade. Comparar essas equações obtidas com as equações já encontradas no Problema do salto da pulga. (Considerar que a altura é crescente debaixo para cima e $\|g\| = 10m/s^2$).	123
15 – O que mudaria na Questão 14 se no lugar de uma pulga fosse uma pedra de 1kg? Explicar a sua resposta.	123
16 – Usando as equações de h e v, deduzir a equação de Torricelli ($v^2 = v_0^2 + 2A\Delta h$). (Sugestão: isolar t na equação da velocidade e substituir na equação de h).	2

Fonte: do autor

A última coluna traz a classificação dos assuntos relacionados a cada questão. Assim a questão 3, por exemplo, diz respeito aos registros algébricos e cartesianos, já a questão 11, além desses dois registros, também envolve o movimento AV/QL.

O roteiro pode ser completado por outras questões que surgem a partir da interação em sala de aula ou por outro exercício tratado do AV/QL, como é, por exemplo, o caso da Questão 14 do Roteiro que pode ser mais explorada.

Conclusões

A unidade significante é peça transversal fundamental, une em vários momentos os elementos semiocognitivos: nos registros, participa das três atividades cognitivas que são a formação, o tratamento e a conversão; na proposta de aprendizagem integrativa, que compreende ao menos dois registros; é condição necessária à conversão coordenada entre esses registros, que se enriquece com a segmentação e recontextualização e que introduz um conteúdo além dos conteúdos dos registros participantes conforme mostrado no esquema da Figura 1.

A segmentação cognitiva pode exigir novas representações que completam a abordagem do conteúdo cognitivo como foi, por exemplo, a representação do sinal da velocidade na Questão 9, e no caso da Questão 6 do exemplo das bolinhas de gude, o preenchimento da tabela pode ser utilizado como uma representação auxiliar que substitui a representação em língua natural e pode ajudar na heurística de resolução de problemas.

Enfim, pudemos constatar que o registro algébrico (sistema de escrita algébrica) por ser um registro de representação discursiva, de acordo com a classificação de Duval (2004b, p. 52), se presta, conforme apresentamos nesse trabalho, a desempenhar o papel semelhante ao da língua natural no que tange o processo de segmentação cognitiva e contextualização cognitiva: essa alternativa abre novas frentes de abordagens didáticas que podem combinar estudos de conteúdos no interior da matemática ou com conteúdos relacionados a outras disciplinas; abordagens que promovam a integração de conteúdos. No caso apresentado neste estudo, integramos um conteúdo da disciplina de física com conteúdos matemáticos. Uma vez que integra componentes curriculares, pode abrir horizontes para abordagem semiocognitiva a ser utilizada no ensino de física ou em outras disciplinas.

Referências bibliográficas

DUVAL, R. **Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência**. (Tradução Méricles T. Moretti). Revemat, v. 7, n. 1, 2012.

DUVAL, R. **Gráficos e equações: A articulação de dois registros**. Trad. Méricles T. Moretti. Revemat, v. 6, n. 2, 2011.

DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. RESTREPO, M. V. Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2004a.

DUVAL, R. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Trad. Myrian V. Restrepo. Santiago de Cali: Merlín I. D., 2004b.

DUVAL, R. **Les problèmes fondamentaux de l'apprentissage des mathématiques et les formes supérieures du développement cognitif**. Curso ministrado à Universidad del Valle. Santiago de Cali, 1999.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

IFC - Campus Santa Rosa do Sul. Núcleo Docente Básico. **Projeto pedagógico de curso de educação profissional técnica de nível médio: curso técnico em agropecuária integrado ao ensino médio**. Santa Rosa do Sul: Núcleo Docente Básico, 2020. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1Brjk0QdtmZD1B5OLtmwAfbRJmc63K8Nx/view. Acesso em 09.12.2024.

MCDERMOTT, L. C., ROSENQUIST, M. L., VAN ZEE, E. H. **Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics**. Am. J. Phis. 55 (6), june 1987.

MORETTI, Méricles T. **A compreensão de texto segundo Raymond Duval: um olhar mais exclusivo direcionado à aprendizagem matemática**. Educação Matemática Sem fronteiras: Pesquisa em Educação Matemática, v. 4, n. 2, Chapecó: UFS, 2022.

PASA, Bárbara C. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais**. Tese (Doutorado), PPGECT/UFSC. Florianópolis, 2017.