***EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS*: Pesquisa em Educação Matemática.**
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

INTERAÇÕES E COMPREENSÕES SOBRE VETOR EM DOIS AMBIENTES VIRTUAIS

INTERACTIONS AND UNDERSTANDINGS ABOUT VECTOR IN TWO VIRTUAL ENVIRONMENTS

Marcelo Almeida Bairral[1]

Soraya Barcellos Izar[2]

Thuane da Silveira Silvano[3]

Resumo

Este artigo é oriundo de um projeto de pesquisa voltado ao aprendizado em ambientes virtuais. Ilustram-se e analisam-se resumidamente interações de licenciandos em Matemática (Estudo 1) e estudantes do 7.º ano (Estudo 2) em uma tarefa sobre translação. No Estudo 1 (E1) os sujeitos interagiram em um dispositivo síncrono e integrado ao GeoGebra e, no Estudo 2 (E2) no AVA-Cap. No E1 a análise foi baseada nos registros escritos, nas construções em tela, nas tabelas e nos gráficos – expostos nas Figuras – gerados na plataforma do *Virtual Math Team* com GeoGebra (VMTcG); e, no E2, nas interações escritas. Destaca-se a forma com que sujeitos construíram o que foi proposto a partir de dúvidas e de ideias emergentes. Ressaltam-se a importância do design de tarefas que aprimore o entendimento de transformação e de relação funcional (E1) e a necessidade de mais análise das formas de entendimento de vetor e da possibilidade de visualizações de representações de translações 2D-3D (E2).

Palavras-Chave: Interações *Online*; Isometrias; Translação; Vetor.

Abstract

This article comes from a research project focused on learning in virtual environments. Interactions of mathematics under graduates (Study1) and 7th grade students (Study2) in a task on translation are briefly illustrated and analyzed. In Study1 (S1) the subjects interacted in a synchronous device integrated with GeoGebra and in Study2 (S2) in the VLE-Cap. In S1, the analysis was based on written records, screen constructions, tables and graphs – shown in Figures – generated on the Virtual Math Team with GeoGebra (VMTcG) and in S2 was based on written interactions. The way in which subjects constructed what was proposed based on doubts and emerging as is highlighted. The importance of designing tasks that improve the understanding of transformation and functional relationship is emphasized (S1), and the need for more analysis on the forms of vector understanding and on the possibility of visualizations of representations of 2D - 3D translations (S2).

Keywords: Online Interactions; Isometrics; Translation; Vector.

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Barcelona. Professor Titular da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Brasil. Instituto de Educação, Departamento de Teoria e Planejamento de Ensino, Rodovia BR 465 km 7, Sala 30, Campus Universitário, Rio de Janeiro, Seropédica, Brasil, CEP: 23890-000. mbairral@ufrrj.br ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5432-9261

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Professora adjunta do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (CAp-UERJ) e Professora de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Colégio Pedro II, Campus Centro. soraya.izar@uerj.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1661-3242.

[3] Mestranda em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). thuanessilvano@ufrrj.br . ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6125-0981.

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

Introdução

Este estudo integra uma pesquisa mais ampla que analisa o modo como sujeitos – estudantes, licenciandos ou professores de Matemática em exercício – interagem e aprendem em ambientes virtuais de aprendizagem[4]. O foco aqui está circunscrito ao aprendizado de conceitos relacionados às isometrias em dois ambientes, o *Virtual Math Team* com GeoGebra (VMTcG) e o AVA-Cap. Particularmente, mostraremos dois protocolos de análise com aspectos emergentes nas interações síncronas sobre translação. Geralmente, a identificação e a análise de vetor – como segmento orientado – têm sido objeto de maior atenção no ensino de isometrias. Todavia, que outras tarefas podem ser implementadas para explorar outras compreensões sobre esse objeto matemático? Que ideias dos sujeitos emergem ou podem ser aprimoradas nas interações dos sujeitos?

A Geometria das Transformações, também conhecida por Transformações Geométricas (TG), apresenta conteúdos que se relacionam com outras áreas do conhecimento (Arte, Arquitetura, Biologia, Física e Química) e podem ser desenvolvidos em vários momentos da Educação Básica. Um dos mapeamentos realizados em nosso grupo identificou pesquisas com a temática das transformações isométricas e algumas direcionadas às transformações não isométricas (Izar, 2023b). A lacuna existente na formação inicial e continuada de professores sobre esse tópico impacta a aprendizagem dos estudantes na Educação Básica, conforme indicaram Delmondi e Pazuch (2018). Portanto, uma investigação que integre as isometrias para desenvolver a visualização a partir da congruência – mediada pela linguagem híbrida, com recursos de geometria dinâmica e disponibilizada em um ambiente virtual de aprendizagem – é original no contexto educacional brasileiro, conforme ilustrado no estudo 2.

Uma forma de analisar a aprendizagem matemática do sujeito é por meio da interação deste com o outro, com a Matemática e com a tecnologia. O aspecto inovador do estudo 1 aqui ilustrado está em analisar gráficos gerados na própria plataforma do VMTcG (adiante, Figuras 3 e 4) e na abordagem de um tópico – translação – ainda pouco explorado no currículo do Ensino Fundamental (Ng; Sinclair, 2015), no do Ensino Médio (Assis, 2020; Barbosa, 2014) e no da Licenciatura em Matemática (Delmondi; Pazuch,

[4] Financiado pelo CNPq e pela Faperj.

2018). Os dois estudos sintetizados no Quadro 1 ocorreram no período de isolamento imposto pela pandemia da COVID-19. Em um cenário de (pós-)pandemia e que demanda planejamentos em atividades *online*, este artigo se mostra importante.

Quadro 1: Síntese dos estudos empíricos ilustrados

Estudo	Contexto	Objetivo geral	Natureza da pesquisa	Ambiente virtual		Produção de dados
				Característica	Dinâmica interativa	
E1	Licenciatura em Matemática na Disciplina de Prática de Ensino (Bairral; Silvano, 2023)	Elaborar e implementar tarefas sobre transformações geométricas no plano, particularmente, as isometrias (simetria, rotação e translação).	Estudo de caso exploratório (Berg, 2006)	VMTcG, chat multirrepresentacional (chat escrito, ferramentas do GeoGebra e quadro branco com possibilidades de construção no GeoGebra)	Interações síncronas em pequenos grupos realizando tarefas específicas	Baseada nas interações escritas e nas construções em tela, a partir de gráficos gerados no VMTcG
E2	Estudantes do 7.º ano do Ensino Fundamental na Disciplina de Desenho (Izar, 2023a)	Elaborar tarefas e analisar de que forma as transformações geométricas mediadas pelas linguagens híbridas e por ambiente de geometria dinâmica contribuem para a visualização da congruência e da semelhança entre figuras geométricas.	Intervenção pedagógica (Damiani *et al.*, 2013)	AVA-Cap, chat escrito	Interações síncronas e assíncronas em tarefas variadas	Registros escritos e transcrição de conversas com os estudantes

Fonte: Elaboração própria

Não se trata de comparar os dois estudos, pois são distintos em termos de desenho didático, sujeitos e forma de produção de dados, mas de elucidar reflexões que possam instigar novos desenhos e análises voltadas ao entendimento e a melhorias no ensino e no aprendizado de transformações geométricas planas.

Isometrias em estudos prévios: transformação, função, olhares pontuais e globais

Além do estudo de Barbosa (2014), mencionado no Quadro 2, outros, focados nas

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: **Pesquisa em Educação Matemática.**
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

transformações isométricas fora do ambiente VMTcG (Assis, 2016, 2020; Ng; Sinclair, 2015; Silva; Almouloud, 2021; Veloso, 2012), merecem atenção e constituem suporte teórico em nossa investigação.

Conceitos de transformação e de função são importantes em Matemática. O de transformação, como explicitado por estudantes do Ensino Médio na pesquisa de Barbosa (2014), foi associado a câmbios, sendo as transformações no plano entendidas a partir de mudanças físicas e corpóreas.

A noção de função, na geometria, desempenha um papel decisivo na simplificação e na fixação de uma terminologia que, no caso das transformações geométricas, tem tido um caráter nebuloso. Para Veloso (2012), a ideia de transformação geométrica como função definida em todos os pontos do espaço, seja o plano, o espaço tridimensional ou outro tipo de conjunto, é decisiva para a compreensão de muitos tópicos da geometria. Concordamos com essa relevância e, a partir de Silva e Almouloud (2021), as atividades planejadas para o trabalho com o VMTcG estão voltadas a dois âmbitos[5] de significação das transformações geométricas, a saber: a transformação considerada como uma aplicação pontual do plano sobre ele mesmo (objeto funcional); e a transformação considerada como uma ferramenta funcional, a fim de colocar em evidência os invariantes ou de resolver o problema. Um olhar para o grupo de transformações – quarto nível apresentado em Silva e Almouloud (2021) – pode ser visto em Assis (2020), no qual o autor analisa estudantes do Ensino Médio realizando composições de modo instigante – não hierárquico – em dinâmicas favorecidas pelos toques em tela em tarefas específicas.

Com os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) é possível construir figuras geométricas a partir de diferentes informações fornecidas – suas características euclidianas, suas medidas etc. –, utilizando estratégias pessoais ou matemáticas. Atividades realizadas em AGD podem influenciar a exploração, a construção de conceitos, a validação ou refutação de conjecturas, entre outros. Os AGD enriquecem a visualização, melhoram o entendimento do processo de construção e possibilitam criar conjecturas e colocá-las em situação de verificação e de prova (Barreira; Bairral, 2017). Estes mesmos autores destacam que os AGD devem ser usados juntamente com

[5] Os autores falam (p. 85) em níveis, mas, como essa denominação levaria a discussões mais detalhadas de concepção de aprendizado, optamos por não adentrar nelas no momento. No primeiro nível a transformação é considerada como uma relação entre duas configurações geométricas ou uma relação entre duas partes de uma mesma configuração (a característica funcional é ausente).

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: Pesquisa em Educação Matemática.
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

propósitos docentes eficazes e adequados, para orientar os discentes a realizar de forma correta as atividades propostas.

A forma de propor uma tarefa e de raciocinar sobre ela é outro aspecto a considerar em um AGD (Bairral; Marques, 2016). O tipo de tarefa e as formas de justificar são características que colocam a matemática em movimento, pois a construção, a visualização e a manipulação de objetos geométricos são possibilidades propiciadas pelo uso de AGD (Powell; Pazuch, 2016).

Particularmente, o estudo das transformações geométricas confere ao ensino da geometria um dinamismo que não existia na versão estática de Euclides (Veloso, 2012) e permite, dentre outras características, o entendimento de aspectos (in)variantes na figura e suas imagens por determinada transformação. Figuras geométricas podem ser transformadas por meio da manipulação de suas propriedades, levando em conta seus elementos particulares (Silva; Almouloud, 2021). Todavia, outra ideia que deve ser explorada é de a imagem ser interpretada como transformação: identificar a imagem da figura pela transformação T do plano, ou seja, determinar uma isometria que transforme uma figura em outra (Veloso, 2012).

O estudo das isometrias envolve a análise da preservação de distâncias e as noções de "situado entre", ponto médio, segmento, semirreta, triângulo, ângulo, amplitude, paralelismo e perpendicularismo (Veloso, 2012, p. 21). Nessa análise, a identificação dos pontos fixos constitui um importante auxiliar no estudo de um tópico ou de um problema envolvendo transformações. Assim, atividades no GeoGebra podem ser grandes aliadas, uma vez que ele favorece a exploração e o manuseio de pontos fixos e livres.

A análise das transformações geométricas em AGD envolve olhares globais – descritos em termos da propriedade de uma dada figura – e pontuais, observados em termos do mapeamento de uma parte da figura para a outra (Ng; Sinclair, 2015). Portanto, é importante que (futuros) professores de Matemática compreendam a simetria ortogonal (ou axial ou reflexão) não apenas como a simetria no objeto – em que se explora o papel do eixo de simetria em figuras geométricas, suas características em elementos da natureza e sua influência no mundo das artes –, mas também o objeto matemático da simetria ortogonal, em que se devem estudar sua definição e propriedades matemáticas (Silva; Almouloud, 2021).

O estudo de Yanik (2014) explorou a translação utilizando imagens conceituais a

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

partir instruções em aula, de livros didáticos de Matemática e de ciências, de exemplos da vida real e da linguagem cotidiana – com estudantes do 6.º ano em um ambiente não informático em uma escola na Turquia. As análises das respostas dos discentes revelaram duas grandes imagens conceituais da translação: com o movimento de translação propriamente dito e com o movimento de rotação e de translação. Os dados revelaram cinco interpretações para o conceito de vetor de translação: 1) como linha de referência[6], 2) como linha de simetria[7], 3) como indicador de direção[8], 4) como parâmetro[9] e 5) como ferramenta abstrata[10]. Considerando que os estudantes se baseiam em suas imagens conceituais[11], a investigação também ressalta a importância de aprimorar a definição do conceito. E sinaliza que a linguagem cotidiana pode interferir na aprendizagem e na conceitualização de translação e que análises futuras podem explorar o papel de significados convencionais das palavras na interpretação formal de conceitos de translações geométricas. Para esse aprimoramento conceitual reconhecemos que as tarefas possuem relevância, principalmente, por permitirem o aprofundamento entre as imagens conceituais e as da definição.

Como nosso foco aqui está no aprendizado (*online* e síncrono) de isometrias com o GeoGebra, aproveitamos para utilizar algumas das tarefas elaboradas em Assis (2016, 2020). Embora elas sejam para o GeoGebra em *tablets* e *smartphones*, o seu design foi adaptado para o VMTcG, e a restrição de uso para alguns ícones foi um fator destacável em algumas tarefas. O autor trabalha com rotação, translação e simetria, temáticas que, segundo ele, são pouco contempladas no currículo escolar.

Alguns estudos prévios com o *Virtual Math Team*

Dentre os diversos estudos prévios destacamos quatro relevantes ao nosso estudo

[6] Foi utilizado um vetor como se fosse uma linha que marcasse o meio da translação, ou seja, os discentes verificaram a distância entre a figura da pré-imagem e o vetor para identificar a localização da figura da imagem (p. 41).
[7] Estudantes executaram uma reflexão em vez de uma translação (p. 42).
[8] Discentes localizaram a figura da imagem em algum lugar na direção do vetor, isto é, na direção que a seta apontava, mas não mencionaram o que define a distância entre os pontos da pré-imagem e da imagem. Em alguns casos localizaram a figura da imagem em algum lugar na frente da seta sinalizada pelo vetor (p. 42).
[9] Estudantes usaram a direção e o comprimento do vetor para realizar translações, ou seja, mediram e fizeram a translação com base na medida obtida (pp. 43-44).
[10] Sujeitos consideraram que o vetor de translação tinha alguma função, mas não sabiam o que era (p. 44).
[11] Estruturas cognitivas envolvem representações, imagens mentais, propriedades e podem ser descritas mediante imagens conceituais.

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

(Quadro 2), sombreando em verde os resultados de cunho mais matemático e em cinza os relacionados ao design de tarefas e aos processos de raciocínio e de prova, importantes em nossa análise.

Quadro 2: Pesquisas utilizando VMT

Autor(es)	Público-alvo	Temática	Objetivo geral	Resultados
Barbosa (2014)	Alunos do Ensino Médio	Transformações no plano com foco nas matrizes	Compreender como alunos desenvolvem ideias sobre transformações no plano mediante tarefas envolvendo matrizes.	Identificar a metáfora transformação como mudança, na qual transformações no plano foram entendidas a partir de mudanças físicas, corpóreas. A metáfora de ligação matriz identidade é elemento neutro e emergiu de provocações da pesquisadora. O elemento neutro da multiplicação de números reais provocou a compreensão de que a transformação pode não mudar, quando a matriz de transformação é a matriz identidade.
Brito (2022), Brito e Bairral (2023), Bairral e Brito (2024)	Licenciandos em Matemática e formação continuada de professores	Semelhança de triângulos	Analisar o aprendizado de semelhança mediante interações no VMTcG.	A importância do design das tarefas, do uso da malha quadriculada e do controle deslizante e da mediação semiótica. Controle deslizante como um recurso que articula análise de significados pessoais e matemáticos e que auxilia na verificação do resultado.
Izar (2023a)	Estudantes do 7.° ano (12-13 anos) do Ensino Fundamental	Transformações isométricas e não isométricas	Elaborar, implementar e analisar um conjunto de atividades que proporcionem a visualização e a compreensão a partir da congruência entre figuras (com as isometrias) e depois com a proporcionalidade entre dimensões (semelhança e homotetia).	A relevância de explorar as linguagens híbridas (sonora, visual e verbal) associadas a recursos dinâmicos e de potencializar a interação no AVA. O uso de recursos variados, articulados às diferentes linguagens, promove a compreensão de propriedades e de características das transformações estudadas.
Bairral e Silvano (2023)	Licenciandos em Matemática	Translação	Trabalhar a translação por meio de um vetor qualquer e de vetor sendo o raio de uma circunferência.	Destaca-se a forma com que os futuros professores construíram o que foi proposto a partir de dúvidas e de ideias emergentes. Ressalta-se a importância do design de tarefas que aprimorem o entendimento de transformação e de relação funcional no trabalho com isometrias.

Fonte: Elaboração própria

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: **Pesquisa em Educação Matemática.**
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

Dos estudos elencados no Quadro 2, a nova versão do VMTcG em atividades sobre TG foi utilizada apenas por Brito (2022), Brito e Bairral (2023), Bairral e Brito (2024) e Bairral e Silvano (2023). A versão atual funciona bem em *smartphones* e possibilita a geração de gráficos, como veremos na análise.

Brito (2022) analisou o aprendizado de futuros professores sobre semelhança de triângulos e destacou a importância do design das tarefas, ao resgatar o conceito da mediação semiótica (Bussi; Mariotti, 2008). O papel da malha quadriculada e do controle deslizante foi importante em algumas tarefas, sobretudo as que envolviam a comparação de medidas de lados. Em Bairral e Brito (2024) detalhamos a análise, de modo a elucidar contribuições do controle deslizante – particularmente, por mostrar ser um recurso de análise que transita de significados pessoais para os significados matemáticos representados pelas respectivas proporções dos lados do triângulo. Também auxilia na produção de conjecturas, na validação (ou refutação) de uma propriedade observada e na verificação do resultado.

A partir da revisão apresentada nas duas seções anteriores, sintetizamos, no Quadro 3, aspectos que fundamentam teoricamente nosso estudo.

Quadro 3: Aspectos teóricos fundantes

Aspectos matemáticos nas interações negociativas	Aspectos da mediação semiótica no design de tarefas e das ambiências aqui analisadas
-Transformação como função. -Relações entre objetos e na dinâmica das relações entre relações. -Visualização, construção e manipulação de objetos geométricos como processos intrínsecos. -Raciocínio ascendente ou descendente. - Olhares globais e pontuais. -Fase de exploração e de construção de provas. -Variantes e invariantes.	-Enunciados diferentes geram descobertas matemáticas diferentes. -Importância do controle deslizante, de restrição de ícones etc. -Exploração e manuseio de pontos fixos e livres. -Figuras em diferentes tamanhos e posições. -Construções prévias em arquivos a compartilhar. -Importância das linguagens híbridas (sonora, visual e verbal) no aprendizado e no design de tarefas. -Integração de diferentes espaços *online*.

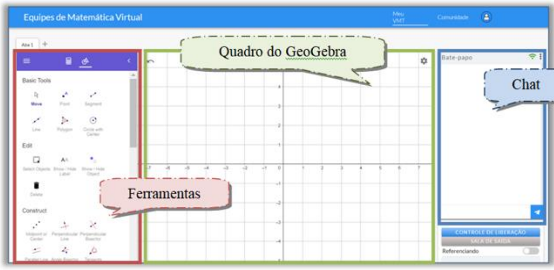
Fonte: Elaboração própria

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: _Pesquisa em Educação Matemática._
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

Estudo 1: Contextualização e produção de dados

A pesquisa está ambientada no VMTcG[12], uma plataforma *online*, com chat escrito, quadro e ferramentas do GeoGebra, para atividades síncronas, em pequenos grupos. No chat é possível ver se o sujeito está com o controle[13], que permite a construção e o uso do GeoGebra. É possível também postar e acompanhar as mensagens de texto no chat. A Figura 1 ilustra esses aspectos.

Figura 1 – Tela de uma sala do VMTcG (Captura de Tela)



Fonte: Bairral e Silvano, 2023, p. 316

Participaram deste estudo dez licenciandos (concluintes) em Matemática e cinco mestrandos de um Programa profissional da IFES, no período de setembro a dezembro de 2020.

Como habitualmente, fizemos o momento de ambientação, em que os sujeitos fazem construções e conhecem o cenário a partir de uma atividade simples, em termos de construções e de conceitos prévios. Após essa ambientação, foram aplicadas três atividades[14], uma das quais incluía a construção de quadriláteros, envolvendo translação[15]. Sobre ela discorreremos na seção seguinte.

Planejamento e estruturação da análise

Focaremos na primeira atividade[16], cujo objetivo foi trabalhar com a translação, por meio de um vetor. Cada chat é planejado para uma duração máxima de duas horas. Separamos duas possibilidades: a primeira, com um vetor qualquer; e a segunda, com o vetor sendo o raio de uma circunferência.

[12] Disponível em: https://vmt.mathematicalthinking.org/. Acesso em: 10 jul. 2024.
[13] Controle de liberação, em azul, na parte inferior direita.
[14] Neste artigo usamos tarefa e atividade como sinônimos.
[15] Dado um vetor MN, diz-se translação, definida por MN, a transformação geométrica T que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P', que é a extremidade do segmento orientado (ou vetor) PP' e tem P como origem (Veloso, 2012).
[16] Descrição da atividade no artigo de Bairral e Silvano, 2023.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: Pesquisa em Educação Matemática.
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

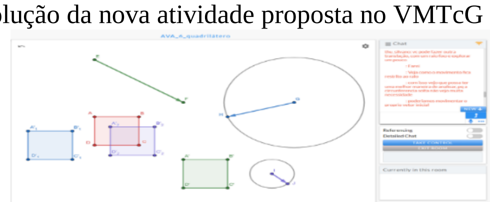
Os dados – registros escritos, construções e movimentos no GeoGebra, tabelas, gráficos e *replayer* – são gerados diretamente pelo VMTcG. Analisamos o chat e as construções para observar o trabalho em equipe durante as atividades, a forma como construíram o que foi proposto e as hipóteses criadas no decorrer das atividades sobre o movimento das figuras, incluindo as tentativas de provar essas conjecturas.

O trabalho no VMTcG ocorre em pequenos grupos. Cada sala (grupo) – considerada única, pois os sujeitos são singulares – compõe uma unidade de análise. Os dados ilustrados e discutidos aqui são oriundos dos gráficos gerados e da revisita constante – com uso do *replayer* – às interações e às construções dos sujeitos. Os gráficos e o *replayer* são recursos do VMTcG.

As construções são feitas em conjunto no GeoGebra, e os participantes comentam e debatem no chat suas observações, respostas e dúvidas. Portanto, a aprendizagem no VMTcG é vista como a conjunção (Çakir; Zemel; Stahl, 2009) das ideias dos sujeitos nos diferentes espaços do ambiente, principalmente o chat escrito e as construções e observações compartilhadas no quadro com o GeoGebra. A interação é o processo comunicativo que potencializa esse aprendizado colaborativo (Bairral; Marques, 2016).

Os 15 participantes foram divididos em 4 grupos de no máximo 4 integrantes. Ao todo, a atividade 1 foi aplicada em 8 salas. A escolha da sala "AVA_6_quadrilátero" (Figura 2) foi feita a partir da contribuição dos participantes no chat, para pensar a atividade de uma forma diferente, pois a pesquisadora (Silvano, T. S.[17]) percebeu a dificuldade de um licenciando sobre a variação do vetor translação. O objetivo da atividade era comparar o raio da circunferência, sendo um vetor (Figura 2, vetor GH) com o vetor construído anteriormente (Figura 2, vetor EF), pois os graduandos disseram que eram iguais. Foi, então, proposta uma tarefa com um raio fixo, para que comparassem um novo vetor (Figura 2, vetor IJ). A realização durou aproximadamente 1 hora.

Figura 2 –Resolução da nova atividade proposta no VMTcG (Captura de tela)



Fonte: Bairral e Silvano, 2023, p. 319

[17] Terceira autora desse artigo

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

As figuras ilustrativas ao longo do artigo são geradas pelos pesquisadores em documentos editáveis, para facilitar a composição textual da análise. Na plataforma é possível gerar tabelas e gráficos com todas as informações da sala ou parte delas, a partir do que se deseja analisar (Bairral; Silvano, 2023). Os integrantes adicionam ou criam as figuras geométricas e arrastam ou movem suas construções, conforme pede a atividade, e seu foco é sempre em selecionar e arrastar, ou seja, explorar a construção. Também podemos filtrar para ver quem mais mexeu na plataforma e verificar quem participou. Além do espaço de estatísticas do VMT, há um espaço chamado *replayer* – já referido aqui –, que possibilita rever completamente a atividade interativa, passo a passo e na velocidade desejada[18].

Protocolo 1: Análise do caso – a dupla GB e NL

A pesquisa configura-se como estudo de caso, de natureza exploratória, principalmente, porque os sujeitos não conheciam o VMTcG e possuíam pouca vivência de aprendizagem com as isometrias. Eles estudaram Transformações Lineares em Álgebra I, Teoria dos Grupos e Teoria dos Anéis[19].

A sala analisada mostrou-se singular, por ter sido formada por um graduando e uma graduanda que ofereceram respostas instigantes na sondagem – respectivamente, GB "*Não sei dizer do que se trata, mas sei que o nome é familiar*" e NL "*Confesso que esse tópico foi o mais complicado de responder para mim, precisei pesquisar para formular uma resposta. Os resultados me levaram para um lado da isometria geométrica, ou seja, são imagens semelhantes em sequência com a mesma distância entre os pontos*". O propósito, portanto, é analisar com mais pormenores a compreensão e o desenvolvimento conceitual desses licenciandos na atividade proposta, de modo a orientar novas elaborações de tarefas (Berg, 2006).

Nosso processo analítico não estabelece comparações de rendimento de aprendizado entre as salas. A postura dos investigadores é acompanhar as discussões e

[18] Esse espaço aparece como um vídeo, no qual podemos acelerar ou deixar mais devagar, avançar, dar *pause* ou *play* e, por fim, passando o cursor na barra do vídeo, é possível ver com poucos detalhes que ação aconteceu naquele momento. Com o *replayer* podemos perceber algum detalhe que tenha passado despercebido durante a atividade e, até mesmo, analisar as construções simultaneamente, pois nesta versão do VMTcG não é possível ver as construções do quadro branco, ao vivo – é preciso atualizar a página ou "assumir o controle".

[19] No currículo atual essa disciplina se denomina Teoria dos Anéis.

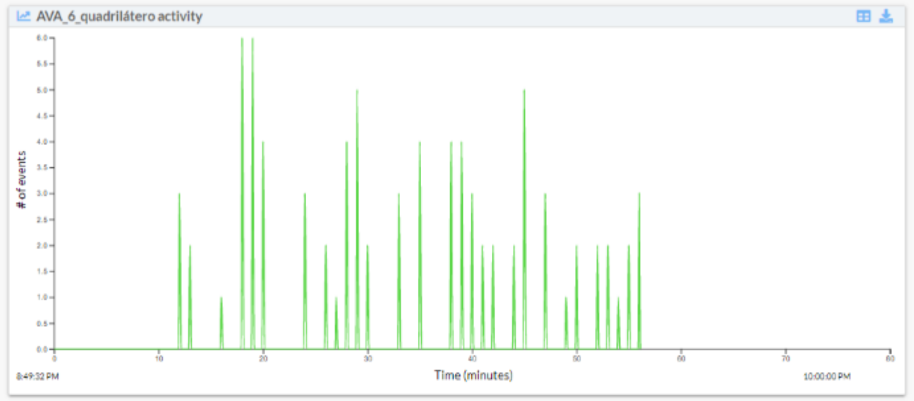
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

intervir somente quando são demandados ou quando percebem algum erro conceitual e ou de construção. Procuramos sempre deixar as interações fluírem o mais naturalmente possível, pois nesse processo o aprendizado vai ocorrendo e se redimensionando, quando necessário.

O auxílio dos gráficos gerados

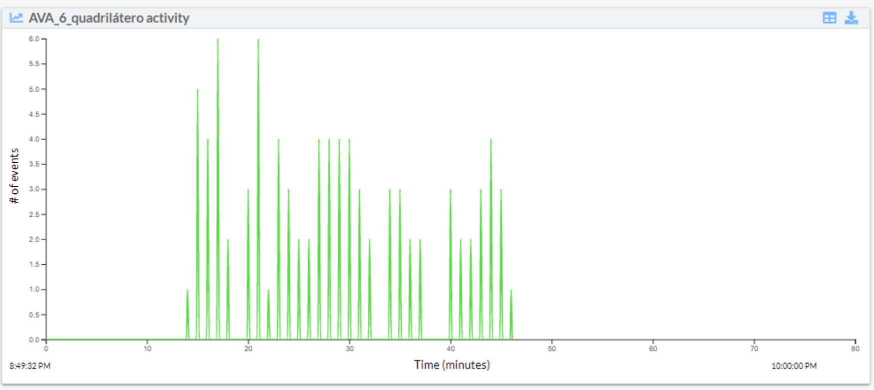
Utilizando a ferramenta de estatística fornecida pela plataforma do VMTcG, geramos gráficos filtrando os sujeitos individualmente. Além das construções, a atividade propôs que os licenciandos fizessem observações no chat escrito, cuja estatística (de todo tempo de atividade) está ilustrada nas Figuras 3 e 4.

Figura 3 – Gráfico com as mensagens do participante GB no chat do VMTcG (Captura de tela)



Fonte: Bairral e Silvano, 2023, p. 323

Figura 4 – Gráfico com as mensagens da participante NL no chat do VMTcG (Captura de tela)



Fonte: Bairral e Silvano, 2023, p. 324

A Figura 3 representa as mensagens escritas do aluno GB, e a Figura 4 traz as mensagens escritas de NL. Em ambas as figuras podemos perceber mais variações e movimentos. Isto é, a atividade transcorreu, na maior parte do seu tempo, no chat. Nele os licenciandos fizeram observações sobre as construções, tiraram e esclareceram dúvidas

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

e, como proposto, criaram conjecturas e tentaram justificá-las. Como pode ser observado nas Figuras 3 e 4, o discente GB esteve mais tempo do que NL, o que se explica pelo fato de NL ter tido necessidade de sair mais cedo da atividade.

Na comparação das Figuras 3 e 4 não é fácil identificar interseções, pois os dois estudantes participaram do chat escrito a todo o momento, diferentemente do chat de construções (quadro branco), que só pode ser mexido por um aluno a cada vez.

Após uma análise gráfica do chat escrito, passamos a observá-lo com detalhes a cada mensagem, ou seja, atentamos para o modo como os participantes respondiam as questões e como planejavam realizar as construções – algumas vezes em grupo e outras individualmente.

Interagindo e aprendendo sobre translação

Após um momento de cumprimentos e dúvidas à espera de todos os integrantes da sala para o início da atividade, pudemos observar que GB fez a construção individual, e não em equipe, como o proposto. No entanto, após a primeira construção, os dois participantes começaram a interagir no chat, comentando sobre as construções já feitas e as que precisavam fazer e revelando suas observações sobre o que ocorreu na primeira etapa da atividade.

Quadro 4: Fragmento[20] do chat do VMTcG

23	GB	Posso assumir o controle?
24	NL	Pode sim, apareceu para você o que eu fiz?
25	GB	Apareceu sim NL
27	NL	Conforme vamos movimentando o ponto da circunferencia o quadrilatero vai girando né?
28	GB	Não entendi muito bem a proposta da questão (d)
29	GB	Alguém entendeu?
31	NL	Bom, pelo o que eu entendi temos que observar a movimentação do quadrilátero a partir do movimento do ponto na circunferência
32	NL	E criar hipóteses a partir disso
33	NL	é isso?
34	Mediador	é para vcs criarem hipóteses a partir disso
35	Mediador	e explicarem pq funciona (provar)
36	GB	Se colocamos, uma translação em "função" do vetor e em seguida colocamos esse vetor fixo em uma circunferência o quadrilátero continua em função do vetor né
37	NL	Acho que sim
38	GB	Pq o movimento que eu faço com os quadrilateros através da circunferência, também é possível fazer sem a circunferencia, não
39	GB	você vai tentar
43	NL	Eu tento fazer o movimento do quadrilátero e sem o ponto da circunferencia e não

[20] Transcrições mantidas na forma em que foram postadas.

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

		consegui
44	NL	Então acredito que está relacionado com um sim de circunferencia
45	Mediador	Como assim é possível movimentar sem a circunferência?
48	NL	O GB tinha sugerido que seria possível movimentar o quadrilátero sem o ponto da circunferencia e eu tentei e não consegui
55	NL	GB agora nós só temos que analisar o quadrilátero que foi criado a partir da relação do primeiro quadrilátero, o centro da circunferencia e o ponto da circunferencia
56	GB	Não sei se viram, mas no meu ponto de vista a circunferencia não faz muita diferença, a não ser que colocamos um raio fixo
57	GB	aí dá pra fazer uma comparação de diferenças
58	Mediador	Não deu pra ver, mas pra mim a circunferência faz diferença
59	Mediador	Não consegui entender sua ideia
60	NL	Também não consegui entender muito bem
61	GB	NL, da mesma forma que a primeira, há uma translação
62	NL	Sim e agora essa translação está associada a uma circunferência

Fonte: Bairral e Silvano, 2023, p. 325

Como visto no Quadro 4, algumas dúvidas iniciais surgiram sobre a questão que solicitava criar uma hipótese sobre a construção e colocá-la à prova, como quando GB declara (linha 28): "*Não entendi muito bem a proposta da questão (d)*", "*Alguém entendeu*?" e, em seguida, há a explicação de NL: "*Bom, pelo o que eu entendi temos que observar a movimentação do quadrilátero a partir do movimento do ponto na circunferência... E criar hipóteses a partir disso*".

A partir da hipótese sugerida por GB: "*Se colocamos, uma translação em 'função' do vetor e em seguida colocamos esse vetor fixo em uma circunferência o quadrilátero continua em função do vetor ne*" (linha 36), iniciou-se uma discussão a respeito do vetor que fazia a translação, o qual pertencia à circunferência.

"*Pq o movimento que eu faço com os quadrilateros através da circunferência, também é possível fazer sem a circunferencia, não*" (linha38). "*Não sei se viram, mas no meu ponto de vista a circunferencia não faz muita diferença, a não ser que colocamos um raio fixo*" (linha 56). O participante GB entendia que, por não estar fixo o raio da circunferência e podermos aumentá-lo e diminuí-lo conforme movimentamos o ponto da circunferência, esse vetor não se diferenciava do outro, pois este outro também possibilitava movimentá-lo livremente no plano. NL e o mediador não conseguiam enxergar essa possibilidade. Como NL precisou sair por motivos pessoais, o mediador continuou com GB. A sequência dessa discussão está reproduzida no Quadro 5.

Quadro 5: Fragmento do chat do VMT

87	Mediador	Consegui entender
88	Mediador	Realmente, os movimentos ficam bem semelhantes
89	Mediador	se o raio não for fixo

90	Mediador	vc pode fazer outra translação, com um raio fixo e explorar um pouco
91	GB	Farei
92	GB	Veja como o movimento fica restrito ao raio
93	GB	com isso vejo que vou ter uma melhor maneira de analisar, pq a circunferencia solta não vejo muita necessidade
94	GB	poderiamos movimentar o proprio vetor inicial
95	Mediador	Com o raio fixo, tem como a gente posicionar o quadrilátero transladado com o original?
96	Mediador	na mesma posição
97	GB	não
99	Mediador	é uma diferença interessante entre as circunferências
100	GB	Sim sim
101	Mediador	ta ótimo
102	Mediador	Quer fazer mais alguma observação?
103	GB	mas é uma diferença que não encontramos na primeira construção e depois que criamos a circunferencia
104	GB	Eu to satisfeito
105	GB	foi bem interessante

Fonte: Bairral e Silvano, 2023, p. 327

Posteriormente às explicações e às observações a respeito dos vetores, o mediador propôs que o participante GB construísse uma circunferência, com um raio fixo que fosse um vetor e fizesse a translação do quadrilátero inicial, por meio desse vetor. Com essa proposta, foram surgindo novas questões para melhorar a exploração da construção, como na linha 95, em que o participante GB é questionado se é possível posicionar o quadrilátero transladado em cima do quadrilátero inicial, já que nos dois casos anteriores há essa possibilidade.

Da sondagem aos gráficos, aos escritos, às construções em tela e às ideias emergentes nas interações

O trabalho da dupla GB e NL na atividade focou na translação, particularmente na atenção para vetores. Embora nosso objetivo aqui seja ilustrar as interações síncronas, cabe resgatar as ideias escritas por ele e por ela no momento de sondagem. Observamos que foi um movimento produtivo para a dupla, ou seja, o seu aprendizado deslocou-se de algo desconhecido (ou complicado) para ideias potentes no estudo das transformações geométricas (Silva; Almouloud, 2021; Veloso, 2012), como a de relação funcional (GB-linha 36) e a da imagem gerada por uma transformação (NL-linha 62). Além do mais, a terminologia envolvida, embora conhecida por eles, foi emergindo a partir do enunciado da tarefa mediante ícones e formas de questionamento. A tipologia da tarefa não é neutra, e seus elementos constitutivos assumem papel na aprendizagem dos sujeitos (Bussi; Mariotti, 2008; Powell; Pazuch, 2016).

O objetivo da atividade era que os participantes diferenciassem os dois vetores. Isso ocorreu somente quando a tarefa teve um novo design. Queríamos que eles observassem que, sendo o vetor um raio fixo da circunferência, ele só se moveria de forma circular (elemento invariante), ao contrário do vetor criado a partir de dois pontos quaisquer, que poderia se mover em qualquer direção e variar de tamanho – ideias que só surgiram nas interações de GB e NL. Quando realizamos as transformações e movimentamos o vetor, pudemos ver que a figura original e a figura gerada pela transformação não se modificaram. Não fixando o vetor na circunferência, podemos gerar figuras a partir de outras transformações. Problematizar quais seriam é uma outra ideia interessante para uma conversa, em um outro bate-papo ou conversa informal.

As interações nessa atividade estiveram circunscritas ao raciocínio ascendente (Arzarello *et al*., 2002), ou seja, os participantes realizaram construções, manipularam e questionaram, para posteriormente explorar conceitos emergentes, sem aplicar diretamente os que conheciam. Essa forma de raciocinar pode ter sido influenciada pela tarefa, que era diferente para eles (GB-linha28). Cabe investigar mais essa interpretação.

Após a remodelação da atividade e de novas explorações, GB declarou estar satisfeito com a atividade e ter sido interessante a utilização do VMTcG. Além disso, ao ser perguntado se utilizaria essa tarefa em aula, disse que seria uma boa proposta, apenas com algumas modificações, como a que foi feita após sua dúvida. Aqui vemos a importância de a aprendizagem ser problematizada juntamente com desdobramentos, para a atuação profissional dos envolvidos (Powell; Pazuch, 2016).

Estudo 2: Contextualização e produção de dados

Apresentamos um recorte de uma pesquisa de doutorado que trabalhou com as Transformações Geométricas (TG) no Ensino Fundamental do CAp-UERJ (CAp), para desenvolver a visualização geométrica a partir da congruência entre figuras (com as isometrias), passando pela proporcionalidade entre dimensões, até a semelhança entre figuras (com as homotetias). Para isso foram utilizados recursos multimídia e programas de geometria dinâmica (GeoGebra) disponibilizados no Ambiente Virtual de Aprendizagem do CAp (AVA-CAp). O trabalho com as Transformações Geométricas é relevante devido ao abastado campo de conexões com outras áreas do conhecimento, o que as torna um recurso para demonstrações, resoluções de problemas e para promover o

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

raciocínio sobre o plano e o espaço (Bastos, 2007).

As atividades foram implementadas na disciplina Desenho com estudantes do 7.º ano do Ensino Fundamental do CAp-UERJ no ano letivo de 2021. A proposta era abordar o conteúdo das TG e a visualização (Bairral, 2009; Costa, 2000; Kaleff, 2016; Veloso, 1998) de suas características através de trabalhos artísticos de base geométrica, vídeos, planilhas dinâmicas e exemplos de aplicações da vida prática, priorizando as representações gráficas e os aspectos semióticos da comunicação visual. Nessa perspectiva semiótica, a análise da pesquisa se respalda nas linguagens híbridas (Santaella, 2019), na interação e na mediação pedagógica (Vigotsky, 2007). Neste recorte, será apresentada a etapa sobre as observações da Translação, particularmente o desenvolvimento do conceito de vetor.

A- Planejamento e estruturação da análise

Em dois encontros síncronos realizados em setembro de 2021, no AVA-Cap, o conteúdo Translação foi desenvolvido com o auxílio de três planilhas dinâmicas do GeoGebra (ilustradas na Figura 5) sobre o tema e construções em tempo real no próprio software. As trocas que aconteceram nos encontros síncronos foram importantes para observação das características da translação e contaram com interessantes associações realizadas pelos estudantes, incluindo a associação da translação com construção de figuras.

Figura 5 – Planilha dinâmica de Simetria de Translação

Fonte: capturas de tela da planilha do GeoGebra[21]

B- Protocolo 2: A translação em tarefas com diferentes recursos

Nesta seção serão apresentadas as atividades desenvolvidas para observação e

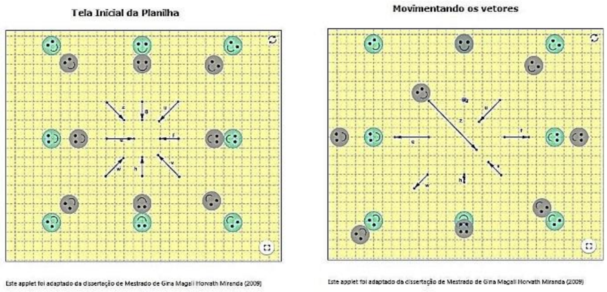
[21] Disponível em:https://www.geogebra.org/m/yqntnpvm, https://www.geogebra.org/m/vw9utjdr e https://www.geogebra.org/m/emv2vtu8. Acesso em: 07 jul. 2024.

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

conceituação da Translação e a contribuição dos discentes que participaram do campo.

Após o primeiro encontro, em que foram trabalhadas as planilhas do Garfield e do sapinho (ilustradas na figura 5), a interação pedagógica foi direcionada para a observação das características da translação e para o desenvolvimento do conceito de vetor. O objetivo da apresentação da planilha de Simetria de Translação do GeoGebra (Figura 6) era observar a movimentação das carinhas azuis (figuras originais, fixas no plano) e cinza (figuras transformadas conforme o vetor), que se movimentavam no plano conforme a direção, o sentido e o tamanho dos vetores definidos pelo manuseio do estudante. As cores mostram a posição e o deslocamento da figura transformada e ajudam o estudante a visualizar a posição e o tamanho do deslocamento em relação à carinha original. A planilha dinâmica (imagem colorida + movimento) foi um dos recursos híbridos (Santaella, 2019) que favoreceram a compreensão da transformação.

Figura 6 – Planilha dinâmica de Simetria de Translação



Fonte: capturas de tela da planilha do GeoGebra

No diálogo[22]com os alunos, a professora (**P**) recordou a interação com as planilhas dinâmicas do GeoGebra do encontro anterior. Na planilha das carinhas felizes, os estudantes perceberam a movimentação. O estudante **H** lembrou do nome da transformação (translação). A estudante **F** identificou que a movimentação das carinhas acontecia segundo um segmento de reta, mostrando que tal movimento tinha um início e um fim.

Em outro momento da conversa[23], a estudante **A** ressaltou que a carinha cinza se deslocava de acordo com a setinha e alguns momentos ficava no mesmo lugar da carinha

[22]**P**: *O que a gente viu na semana passada? A gente trabalhou com 3 planilhas do GeoGebra. A das carinhas felizes ... (o que essa planilha fazia?), a do Garfield/ Oggie com triângulos e a do Cristiano Ronaldo/ Fusca/ Sapinho.* **A**: *Mudavam de lugar.* **H**: *Translação.* **F**: *Se movia.* **P**: *Ela se movia de acordo com o quê?* **F**: *Com um segmento de reta.*

[23] **P**: *Uma carinha azul (que era a original).* **A**: *A carinha cinza se movia com a setinha e aí ela conseguia ficar no mesmo lugar que a carinha azul. Elas ficavam para cima e para baixo.*

DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

azul. É essencial destacar dois elementos na narrativa de **A**: a setinha e a sobreposição das carinhas. O uso do termo "setinha" sugere algo além do termo utilizado por **F**, pois, além da ideia de direção e de tamanho informada pelo segmento de reta, a seta indica o sentido do deslocamento, sinalizando o lugar onde a carinha cinza deveria estar. Nesse exemplo a translação é interpretada como movimento (Yanik, 2014), e a percepção de que as carinhas podem ficar sobrepostas também é relevante, pois evidencia a congruência entre as figuras, importante característica das transformações isométricas, que preservam as medidas lineares e angulares. No caso das carinhas da planilha dinâmica, os diâmetros são congruentes. A isometria foi ressaltada na conversa[24] pela docente, que também introduziu o conceito de vetor.

O estudante **L** identificou o vetor da TG, acrescentando a setinha, identificada por **A**, com o segmento de reta, reconhecido por **F**. Nesse momento a professora fez a correlação com as outras planilhas trabalhadas no primeiro encontro síncrono (Figura 6), que aplicavam a mesma TG identificada por **V** e **H**.

Essa conversa introdutória promoveu interações e relembrou as características da TG estudada. Na planilha dinâmica da Figura 6, o propósito era movimentar as carinhas cinza de acordo com as setinhas (vetores). Dessa forma foi possível mostrar aos estudantes o movimento das figuras deslizando na tela (plano) conforme o tamanho, a direção e o sentido do vetor, característica da translação; e a congruência entre as figuras ao ficarem sobrepostas, característica das transformações isométricas. Esse diálogo explorou a ideia de vetor como linha de referência e como indicador de direção (Yanik, 2014).

Posteriormente foram apresentados vídeos (*O Caminho*[25], 2007; *Isto é Matemática*[26], 2013) e ilustrações do *site* MC Escher Symmetry[27] para instigar a

---

[24] **P**: *Isso mesmo,* **A**, *e a gente percebeu que, quando ela (carinha cinza) ficava em cima da carinha azul, o tamanho era o mesmo. Isso acontecia com todas as outras carinhas (cinzas). Essa setinha nos dava... não era uma setinha apenas.* **L**: *É o vetor.* **P**: *Ela nos dava o tamanho desse deslocamento. Então ela nos informava a medida do deslocamento, a direção e o sentido.* **P**: *O vetor. Exatamente,* **L**. *Esse vetor é importante para transformação. E a gente viu também que ela podia acontecer com qualquer forma. Mostrei isso na planilha do Garfield/Oggie, que são formas bem diferentes, assim como se pode aplicar nos triângulos, que são polígonos. E depois nós vimos uma outra planilha que mostrava a bola que o Cristiano Ronaldo chutava para o gol e o fusca se deslocando e o sapinho pulando. Todos esses casos apresentam as transformações que possuem um nome. Que nome se dá as essas transformações?* **V**: *Translação.* **H:** *Translação.*
[25] Disponível em: https://youtu.be/4B4sea2IaqY. Acesso em: 14 jul. 2024.
[26] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=7ac0WC3tzwU&t=46s. Acesso em: 11 jul. 2024.
[27] Disponível em: https://mcescher.com/gallery/symmetry/. Acesso em: 14 jul. 2024.

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

observação e a percepção dos estudantes sobre a TG estudada. Alguns aprendizes registraram[28] no chat o nome da transformação: translação. O estudante **Y** confundiu o nome da TG com um dos seus elementos, porém antecipou a resposta do próximo questionamento e identificou o deslocamento com o vetor da transformação.

Após a exibição do vídeo de animação *O Caminho*, de Thiago Mallet, a pesquisadora confirmou que uma das TG presentes no vídeo é a translação e perguntou sobre o vetor. No diálogo[29], a estudante **A** mostra que ainda não está segura quanto ao conceito de vetor.

Foi retomada a observação atenta do movimento das figuras no vídeo *O Caminho*, para identificar os elementos do vetor. **Y** responde que o vetor é o chão, identificando apenas a direção do vetor, mas não distingue seu sentido e tamanho. A professora intervém, afirmando que o "chão" é uma resposta muito ampla e destaca que as figuras do vídeo se deslocam segundo distâncias iguais. Com essas observações, **A** percebeu[30] que o tamanho do vetor seria o passo das figuras.

É possível visualizar as TG em situações diversas do cotidiano (Bastos, 2007; Kaleff, 2016). Com esse objetivo, foi exibido o vídeo *Isto é Matemática* sobre algumas aplicações existentes na azulejaria (pavimentações diversas) e no trabalho do artista gráfico holandês M. C. Escher, repleto de TG, até então desconhecido para aquele grupo de estudantes[31]. As obras do artista podem estimular a visualização das TG. Após a exibição, os estudantes manifestaram as opiniões sobre o vídeo. A maioria achou interessante, inclusive os estudantes **A** e **V**.

Dois momentos destacaram-se na conversa[32] desenvolvida nesse encontro síncrono: a associação feita pela estudante **A** das construções impossíveis de Escher com as escadas

[28] **Y**: *Deslocamento? Vetor*. **JP**: *Translação?* **F** e **H**: *Translação?*
[29] **P**: *Translação, exatamente. E vocês conseguem identificar o vetor dessa translação? Os bonequinhos andando todos iguaizinhos para trás é uma translação. Translação horizontal que vai da esquerda para direita. E qual é o vetor dessa translação?* **A**: *O que é vetor mesmo?*
[30] **P**: *O vetor é o deslocamento. Eles estão na horizontal e indo da esquerda para direita. E qual é o tamanho?* **Y**: *O chão.* **P**: *O chão,* **Y:** *é muito amplo. Eles estão se deslocando de pouquinho a pouquinho. Que pouquinho é esse?* **A**: *Cada passo*. **P**: *O passo. Exatamente, cada passo.*
[31] **P**: *Essas transformações que estamos vendo também estão presentes nos azulejos que recobrem as paredes de cozinhas, banheiros e em revestimentos de assoalhos de casas. O vídeo do Museu Nacional do Azulejo mostra algumas transformações e fala de um artista que aplicou as transformações em suas obras: Escher. Vocês já ouviram falar de Escher?* **H**: *Não.* **A**: *Não.*
[32] **P**: *Então turma, a gente pode perceber na azulejaria várias transformações geométricas... E no trabalho de Escher também.* **A**: *Acho que Escher foi arquiteto de Hogwarts e fez aquelas escadas doidas.* **AG**: *Nunca mais vou olhar um azulejo da mesma forma.*

ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

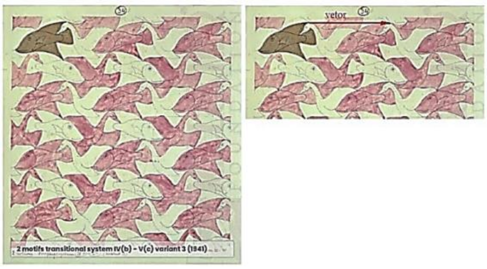
mágicas do Castelo de Hogwarts, a escola de magia dos filmes de Harry Potter (Figura7). **A** enriqueceu a dinâmica, ao evocar um outro tempo registrado em sua memória e fazer correlações com as novas observações; o passeio pelo Museu do Azulejo, através da exibição do vídeo *Isto é Matemática*, fez a estudante **AG** externar que "*Nunca mais vou olhar um azulejo da mesma forma*", conforme registrado no diálogo entre a professora, **A** e **AG** a seguir.

Figura 7 – Hogwarts X Relatividade

Fonte: Izar, 2023a, p.124

Outras obras do *site* MC Escher Symmetry foram exibidas. Durante a apresentação foi solicitado que os estudantes observassem e identificassem a TG estudada nos trabalhos do artista. A estudante **A** pergunta[33] o que seria o vetor na obra de Escher. Para esclarecer a dúvida de **A e** de outros aprendizes[34], foi utilizada uma captura de tela da própria obra exibida, representando um vetor (Figura 8).

Figura 8 – Destaque de um vetor na obra de Escher



Fonte: Izar, 2023a, p. 125

Na sequência, foi compartilhada a tela do GeoGebra, contendo um pentágono irregular e o vetor u. No programa foi aplicada a ferramenta translação para gerar um segundo pentágono de vetor u (Figura 9-A e Figura 9-B) com o propósito de evidenciar

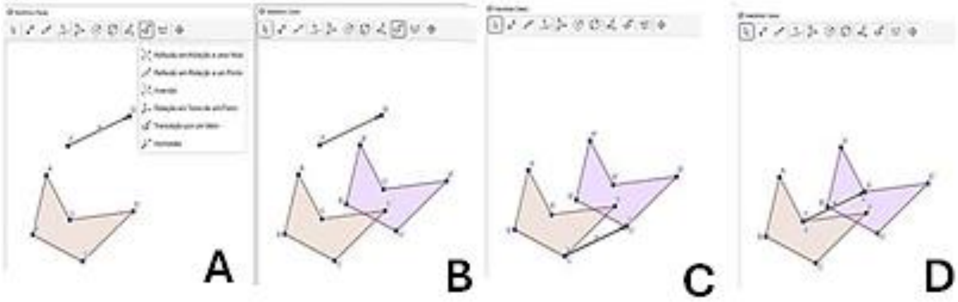
[33] **A**: *Aí o vetor... Aí, no caso é o quê? Cada nadada que o peixe dá?*
[34] **P**: *A distância da ponta da nadadeira do peixe mais escuro até a pontada nadadeira da cópia do peixe. Se você perceber, essas distâncias são as mesmas*. **A**: *Esse é o vetor?* **P**: *Sim. Vou compartilhar com vocês um exemplo no GeoGebra.*

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: _Pesquisa em Educação Matemática._
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

que as distâncias entre os vértices correspondentes do polígono original e da cópia transladada eram iguais, ou seja, congruentes ao tamanho do vetor [35](Figura 9-C e Figura 9-D).

No momento seguinte[36], **A** fez a descrição do que entendeu sobre o vetor, e foi ressaltado pela docente que o conceito de vetor agrega um terceiro elemento ao segmento de reta – que indica apenas tamanho e direção –: o sentido.

Figura 9 – Distâncias entre os vértices correspondentes na translação



Fonte: Izar, 2023a, p. 126

O trabalho com o GeoGebra, associado à percepção do movimento pode estimular o discente a fazer conjecturas (Pinheiro; Alves; Araújo, 2020). O exemplo de construção mostrado no GeoGebra auxiliou a esclarecer a dúvida de **A** e de outros estudantes que não verbalizaram suas questões similares. As imagens trabalhadas no software contribuíram para a visualização do vetor na figura transladada. A linguagem híbrida (Santaella, 2019) viabilizou o processo de entendimento do conteúdo apresentado.

O diálogo mostra a pesquisadora trazendo as ideias de vetor como segmento de referência e como indicador de direção (Yanik, 2014). Todavia, ao relacionar a distância entre os vértices das figuras em análise, parece que **A** está com outra interpretação. Seria a de parâmetro? Caberiam mais interações e análises para esclarecimentos.

---

[35] **P**: _Vou usar a ferramenta translação por um vetor disponível no GeoGebra (Figura 9-A). Translação de quê? Do polígono de acordo com o vetor. Surgiu outro polígono congruente ao primeiro (Figura 9-B). Então, se eu deslocar o vetor passando em cada vértice do polígono original, a gente pode verificar que o vetor termina no vértice correspondente do polígono copiado e que as distâncias são as mesmas (Figuras 9-C e D)._

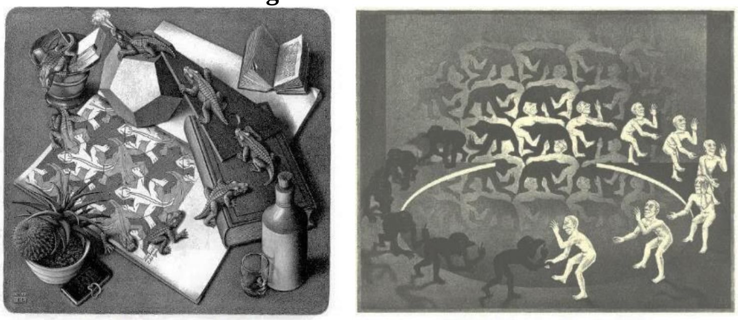
[36] **A**: _Agora eu entendi de verdade o que é vetor. <u>Vetor é a distância dos vértices da cópia à imagem antiga</u>._ **P**: _Isso. Vou mudar a cor do pentágono cópia e deslocar o vetor novamente para visualizar que a distância entre os vértices correspondentes é a mesma. O tamanho é o mesmo e precisa deslocar no mesmo tamanho. Por que que a gente chama de vetor? Porque o segmento de reta não tem sentido. Ele só tem direção e tamanho, comprimento. O sentido é informado pela setinha. <u>O vetor tem a setinha, logo informa a direção, o sentido e o tamanho do deslocamento</u>._ **JP**: _Agora eu entendi._

EMSF – _UFFS_-Chapecó.SC - _Vol. 6, n. 1, p. 100-129, Jan./Jul. 2024._

***EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS*: Pesquisa em Educação Matemática.**
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

O vídeo *Isto é Matemática* mostrou obras em que Escher brincava com a representação do bi e do tridimensional. As litografias *Répteis* e *Encontro* (Figura 10) exemplificam esse registro de transição da representação 2D para a apresentação 3D. Em *Répteis*, o artista representa os jacarés saindo da tela da obra, passeando sobre os objetos e voltando. Faz o mesmo na obra *Encontro,* onde representa os homens saindo do plano de fundo, caminhando em trajetória elíptica e cumprimentando-se no primeiro plano da obra. O entendimento dessa representação nas obras de Escher fazia sentido para os estudantes, devido ao estudo do conteúdo Figuras Planas e Não Planas e suas respectivas representações na disciplina Desenho no CAp-UERJ.

Figura 10 – Obras de Escher



ESCHER. **Repteis**, litografia, 1943. ESCHER. **Encontro**, litografia, 1944.

Fonte: MC Escher Symmetry

As observações sobre as obras de Escher e a construção exemplificada na Figura10 levaram o estudante **V** a visualizar a possibilidade de representação de figuras não planas através da Translação. Associou o vetor com a terceira dimensão nas representações de um objeto em 3D, ou seja, em perspectiva. No fluxo da conversa[37], **A** descreve sua visualização de como um cubo seria gerado.

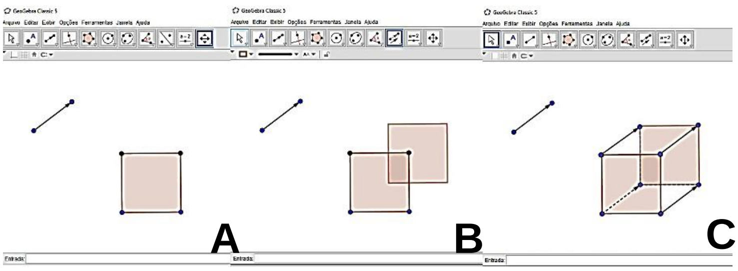
A professora retorna ao GeoGebra e constrói um quadrado e um vetor para ilustrar o processo de visualização de **A**[38]. Para a representação ficar bem próxima da perspectiva de um cubo, foram desenhadas as arestas tracejadas – as arestas internas naquele ângulo de visão (Figura 11).

[37] **V**: *Para fazer uma figura 3D sempre existe um vetor?* **P**: *Dá para desenhar uma figura 3D com um vetor. Se eu fechar essas figuras...* **A**: *Então o vetor... Por exemplo, um cubo... Então aquelas linhas que ligam cada vértice é um vetor?* **P**: *Podem ser congruentes a um vetor. Por exemplo, poderia construir um prisma aqui. Vou construir aqui um triângulo.*

[38] **A**: *E... tipo assim, você construir uma carreira de quadrados... Quer dizer... um cubo, dá um espaço, um cubo, um espaço, aí botar um vetor. Aí, entre um e outro vai criar outro cubo.* ***P****: Sim. Construí um quadrado e um vetor, aqui. Agora vou fazer a translação desse quadrado com esse vetor. Se eu ligar os vértices correspondentes, crio um cubo.* **A**: *Então... era dessa linha que eu tava falando.* ***P****: Vou colocar essas linhas tracejadas para indicar que estão dentro do cubo.*

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: **Pesquisa em Educação Matemática.**
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

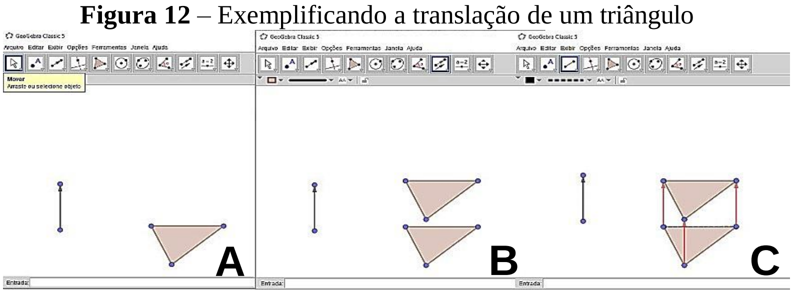
Figura 11 – Exemplificando a translação de um quadrado



Fonte: Izar, 2023a, p. 129

Após responder à questão de **A**, a educadora[39] elabora uma nova representação no GeoGebra, para contribuir com a visualização do estudante **V** sobre o vetor nas figuras 3D: outra figura (um triângulo), em outra posição e comum novo vetor (vertical e para cima). Foi destacado que a representação formada pelo conjunto triângulo original, triângulo transladado e segmentos que unem os vértices correspondentes dos triângulos (cópias do vetor) lembra o sólido geométrico denominado prisma (Figura 12). Outro momento ímpar da interação, pois o estudante **V** visualizou, através da união das figuras transladadas, um sólido geométrico[40].

Figura 12 – Exemplificando a translação de um triângulo



Fonte: Izar, 2023a, p. 130

É significativo destacar que a translação é uma transformação geométrica plana que pode remeter a uma representação tridimensional, como no caso da Figura 11-C e da Figura 12-C. Os estudantes **A** e **V** visualizaram a possibilidade de representar objetos 3D, ao se depararem com os exemplos de polígonos transladados. Isso sugere que exercícios de representação de objetos tridimensionais em superfícies planas deveriam ser

---

[39] **P**: *A mesma construção eu posso fazer com um triângulo. Vou traçar o vetor para cima e na vertical. Vou fazer a translação do triângulo de acordo com o vetor. Observe que, se eu copiar o vetor e colar nos vértices correspondentes, o tamanho será o mesmo. E precisa ser o mesmo, pois a translação foi feita com o tamanho do vetor.*

[40] **P**: *Se considerarmos o sólido formado por esse conjunto (triângulo original, triângulo cópia e segmentos cópias do vetor), teremos um prisma de base triangular. Certo?* **V**: *Ok.* **A**: *Sim.* **JP**: *Sim.* **FH**: *Sim.* **I**: *Sim.*

desenvolvidos mais frequentemente com estudantes ao longo do Ensino Fundamental. Esse tipo de representação é usual e instigante – às vezes dificultosa – e carece de mais estudos, pois pode envolver as cinco possibilidades de imagens que os sujeitos possuem dos vetores (Yanik, 2014) ou pode permitir outras.

Considerações Finais e Desdobramentos

Utilizar ambientes virtuais é mais uma forma de ensino e de aprendizagem matemática, seja em dinâmicas *online* ou presenciais. Selecionamos dois protocolos voltados para o conceito de translação. O primeiro estudo (Bairral; Silvano, 2023) sintetizado aqui analisou interações no VMTcG. Nele a aprendizagem ocorreu mediante interações multirrepresentacionais no ambiente. No segundo estudo (Izar, 2023a), o aprendizado ocorreu no AVA-Cap e foi potencializado pelas interações a partir dos diferentes caminhos trilhados (vídeo, museu, planilha do GeoGebra etc.) pelos estudantes a partir da ambiência proposta.

A partir do analisado cabe destacar contribuições de cada estudo e desdobramentos para novas investigações em ambientes virtuais com recursos dinâmicos. Aspectos emergentes do E1: ampliar a análise de tarefas de conteúdo similar com os mesmos sujeitos; usar o controle deslizante; aprimorar análise de processos de raciocínio (ascendente ou descendente); e do E2: analisar com mais detalhes a rede imagético-midiática favorecida pelas tarefas; utilizar imagens conceituais de vetor e representações na tela 2D para 3D e vice-versa.

O Estudo 1 inova, ao analisar a partir de gráficos gerados na própria plataforma. Embora não forneçam informações sobre a aprendizagem dos envolvidos, os gráficos possibilitam ao pesquisador observar o desenvolvimento interativo como um todo, ou seja, variações, acessos, uso do quadro-branco ou do chat, quantidade de tempo etc. A partir da geração de gráficos é possível selecionar elementos de análise, como vimos no caso selecionado.

Conceitualmente atua na abordagem de conteúdo escasso na formação de professores de Matemática e na escola. Ao potencializar interações síncronas em AGD, estimula a criatividade, a construção e a análise de figuras geométricas, tornando mais instigante a temática para uma geração cercada de tecnologia (Delmondi; Pazuch, 2018). Cabe aprimorar a análise sobre aspectos funcionais nas transformações, conforme

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: **Pesquisa em Educação Matemática.**
ISSN: 2596 -318X
DOI 10.36661/2596-318X.2024v6n1.14515

indicado no Estudo 1.

Didaticamente a contribuição dos dois estudos está no design de tarefas para cenários *online*. Nas atividades analisadas e ilustradas aqui é interessante pensar como pequenos detalhes mudam completamente uma atividade e como também aprendemos com nossos alunos, e não somente ensinamos. Há uma relação de troca de conhecimento no ambiente da sala *online*.

Cada atividade realizada nos ambientes virtuais trouxe, para nós e para os participantes, novas perspectivas de ensino e de aprendizagem de transformações isométricas em AGD. Detalhes, ainda que pequenos, podem trazer alterações significativas no rumo das intervenções. Por exemplo, o acréscimo ou a supressão de um ícone do GeoGebra pode interferir nas descobertas e no aprendizado. A atualização na versão do software também pode demandar mudança no design da tarefa (Assis, 2020). Ou, ainda, como vimos nas Figuras 11 e 12, a representação de objetos tridimensionais na tela 2D pode também permitir explorações de polígonos transladados, mas a compreensão da transformação pode não ser trivial. Essa é uma frente de investigação que pode se abrir a partir dos estudos aqui ilustrados.

Nosso pensamento e nossa linguagem caminham conjuntamente. O estudo de Yanik (2014) indicou a necessidade de mais análises sobre a importância da linguagem, principalmente, as palavras de uso mais formal articuladas às definições de um conceito. As transformações geométricas, em particular, possuem um potencial cognitivo-corporificado que também incrementa o aprendizado e o desenvolvimento conceitual dos sujeitos (Assis; Bairral, 2022). Considerando que as palavras não são entes isolados e precisam ser vistas em um pacote semiótico-multimodal (Arzarello; Robutti, 2010; Bussi; Mariotti, 2008), em nossas futuras análises seguiremos ampliando o espectro linguístico – no desenho didático dos ambientes –, de modo a enriquecer as formas de interagir e de aprender Matemática, conforme indicado pelo Estudo 2.

Mediante a reflexão (ou giro) podemos produzir todas as isometrias do plano (Silva; Almouloud, 2021), e as quatro isometrias básicas – translação, rotação, reflexão ou simetria axial e reflexão deslizante ou simetria deslizante – podem ser obtidas como composições de reflexões (Veloso, 2012). Com os dois estudos descritos focamos na translação, mas cabe elaborar atividades que explorem essa composição de modo a verificar mais detalhes no aprendizado em tarefas com AGD, incluindo o aprimoramento da compreensão – com a potencialização de linguagens híbridas – dos conceitos de transformação e de relação funcional.

Como observado em Assis (2020), nos dois cenários aqui descritos, a composição (o produto) de transformações não foi evidente. Importa também realizar mais estudos, de modo a conferir se isso é uma particularidade dos dispositivos com toques em tela. Outro aspecto que merece maior atenção é o uso do controle deslizante, ou melhor, o design de tarefa integrando esse recurso, como feito em Bairral e Brito (2024).

Agradecimentos

Ao CNPq e à Faperj, pelo apoio ao projeto cujos estudos foram apresentados aqui.

Referências bibliográficas

ARZARELLO, F.; OLIVERO, F.; PAOLA, D.; ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. **ZDM- The International Journal on Mathematics Education**, [S. l.], Vol. 34, n. 3, p. 66-72, 2002.

ARZARELLO, F.; ROBUTTI, O. Multimodality in multi-representational environments. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, [S. l.], Vol. 42, n. 7, p. 715-731, 2010.

ASSIS, A. R. de. Alunos do Ensino Médio trabalhando no GeoGebra e no Construtor Geométrico: mãos e rotAções em touchscreen. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2016.

ASSIS, A. R. de. **Alunos do Ensino Médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com GeoGebra**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2020.

ASSIS, A. R. de.; BAIRRAL, M. A. Touches on screen as new signs in blended ways to think mathematically. **Journal of Educational Research in Mathematics**, [S. l.], Vol. 32, n. 4, p. 423-441, 2022. doi:10.29275/jerm.2022.32.4.423

BAIRRAL, M. A. **Tecnologias da Informação e Comunicação na formação e Educação Matemática**, Rio de Janeiro: Edur, 2009. Vol. 1.

BAIRRAL, M. A.; BRITO, C. de S. Dynamics of triangle similarity: exploring similitude ratios through interactive sliding controls. **Global Journal of Science**

Frontier Research, [S. l.], Vol. 24, n. F1, p. 17-33, 2024. Disponível em: https://journalofscience.org/index.php/GJSFR/article/view/102816.

BAIRRAL, M. A.; MARQUES, F. de J. R. Onde se localizam os pontos notáveis de um triângulo? Futuros professores de matemática interagindo no ambiente VMT com GeoGebra. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, Vol. 18, n. 1, 2016. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/24076. Acesso em: 14 jul. 2024.

BAIRRAL, M. A.; SILVANO, T. S. Licenciandos em matemática interagindo no VMTcG em uma tarefa sobre translação. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, Vol. 25, n. 1, p. 305-335, 2023. doi:10.23925/1983-3156.2023v25i1p305-335

BARBOSA, A. C. M. **Transformações no plano: alunos do ensino médio interagindo em ambiente colaborativo virtual**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2014.

BARREIRA, J. C. F.; BAIRRAL, M. Que quadrilátero é? Licenciandos em matemática usando propriedades conhecidas no VMT com o GeoGebra. **Boletim Gepem**, Seropédica, Vol. 70, p. 143-156, 2017. doi:10.4322/gepem.2017.027

BASTOS, R. Notas sobre o ensino da Geometria: Transformações geométricas. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 94, p. 23-27, 2007. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1619 Acesso em: 3 out. 2021.

BERG, B. L. **Qualitative research methods for the social sciences**. Boston: Allynand Bacon, 2006.

BRITO, C. da S. **Licenciandos e professores de matemática interagindo no VMTcG em atividades de semelhança de triângulos**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2022.

BRITO, C. D. S.; BAIRRAL, M. A. (2023). Triangle similarity: interactions in meshes and slider. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Brasília, Vol. 13, n. 3, p. 1-21, 2023. doi:10.37001/ripem.v13i3.3543

BUSSI, M. G. B.; MARIOTTI, M. A. Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In: ENGLISH, M. B. B. L.; JONES, G.; LESH, R.; TIROSH, D. (Ed.). **Handbook of international research in mathematics education.** 2. ed. Mahwah: Erlbaum, 2008. p. 720-749.

ÇAKIR, M. P.; ZEMEL, A.; STAHL, G. The joint organization of interaction within a multimodal CSCL medium. **International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning**, Berlin, Vol. 4, n. 2, p. 115-149, 2009.

COSTA, C. Visualização, veículo para a educação em geometria. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2000, **Anais** [...]. Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2000.

DAMIANI, M. F. *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, Vol. 45, p. 57-67, 2013.

DELMONDI, N. N.; PAZUCH, V. Um panorama teórico das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas. **RBEP**, Brasília, Vol. 99, n. 253, p. 659-686, 2018. doi:10.24109/2176-6681.rbep.99i253.38616.

IZAR, S. B. **Transformações geométricas**: linguagens híbridas e interações para promover aprendizagens de estudantes no ensino remoto. Tese (Doutorado em Educação) – UFRRJ, Seropédica/Nova Iguaçu. 2023a.

IZAR, S. B. Mapeando sobre transformações geométricas no Catálogo de Teses de Dissertações da CAPES. In: BAIRRAL, Marcelo Almeida; MENEZES, Rhômulo Oliveira. **Elaboração e mapeamento de pesquisas com tecnologias**. 1. ed. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2023b. v. 1, cap. 5, p. 151-183. *E-book* (347p.).

KALEFF, A. M. M. R. **Tópicos em ensino de geometria**: a sala de aula frente ao laboratório de ensino e à história da geometria. Rio de Janeiro: UFF/CEDERJ/UAB, 2016.

NG, O. L.; SINCLAIR, N. Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. **ZDM Mathematics Education**, Hamburgo, Vol. 47, n. 3, p. 421- 434, 2015. doi:10.1007/s11858-014-0660

PINHEIRO, J. M. L.; ALVES, G.; ARAÚJO, J. da S. Transformações geométricas: Abertura à constituição de uma geometria dinâmica. **EM TEIA:** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – UFPE, Recife, Vol. 11, n. 3, p. 1-24, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/245465 Acesso em: 10 jul. 2023.

POWELL, A. B.; PAZUCH, V. Tarefas e justificativas de professores em ambientes virtuais colaborativos de geometria dinâmica. **Zetetiké**, Campinas, Vol. 24, n. 2, p. 191-207, 2016.

SANTAELLA, L. **Matrizes da linguagem e pensamento: sonora, visual, verbal**. Aplicações na hipermídia. 3. ed. São Paulo: Iluminuras FAPESP. 432 p. ISBN 85-7321-152-0, 2019.

SILVA, C. V.; ALMOULOUD, S. A. Um estudo histórico e epistemológico sobre o objeto matemático simetria ortogonal. **Intermaths**, Vitória da Conquista, Vol. 2, n. 1, p. 71-87, 2021. doi:10.22481/intermaths.v2i1.7429

VELOSO, E. **Geometria, temas atuais**: materiais para professores. Instituto de Inovação Educacional. Lisboa, 1998.

VELOSO, E. **Simetria e transformações geométricas**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática – APM, 2012.

VIGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Martins Fontes: São Paulo, 2007.

YANIK, H. B. Middle-School students' concept images of geometric translations. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Brunswick, Vol. 36, p. 33-50, 2014. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.001