

**ACONTECIMENTOS COMPLEMENTARES EM PROBABILIDADES:
EXPLORAÇÃO POR FUTUROS PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS**
**COMPLEMENTARY EVENTS IN PROBABILITY: EXPLORATION BY
PROSPECTIVE PRIMARY SCHOOL TEACHERS**

José António Fernandes¹

Resumo


No artigo apresenta-se um estudo com estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, sobre acontecimentos complementares, a partir dos objetivos: 1) verificar se dois acontecimentos dados são ou não complementares; 2) enunciar a definição de acontecimentos complementares; e 3) formular exemplos de acontecimentos complementares. Participaram no estudo 37 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, que frequentavam uma universidade do norte de Portugal. Os dados foram obtidos através da aplicação de um questionário com várias tarefas sobre diversos tipos de acontecimentos, sendo que no estudo foram usados os dados resultantes das respostas dadas pelos estudantes a apenas uma tarefa com quatro itens, envolvendo a classificação, definição e formulação de acontecimentos complementares. Em termos de resultados, destaca-se que mais de metade dos estudantes foi capaz de classificar acontecimentos em complementares ou não complementares e de formular exemplos de acontecimentos complementares, mas muito poucos justificaram adequadamente as suas respostas. Já os estudantes tiveram mais dificuldades em definir acontecimentos complementares, com cerca de um em cada três a enunciar corretamente a definição. Contudo, mesmo os estudantes que apresentaram definições corretas e completas tiveram dificuldade em aplicar essas definições para justificarem a classificação dos acontecimentos em complementares ou não complementares e a exemplificação de acontecimentos complementares, o que destaca a necessidade de os estudantes praticarem tais justificações.

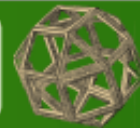
Palavras-Chave: Probabilidades; acontecimentos complementares; futuros professores; primeiros anos escolares.

Abstract

The article presents a study with students, prospective primary school teachers, about complementary events, based on the objectives: 1) to verify if two given events are complementary or not; 2) to state the definition of complementary events; and 3) to formulate examples of complementary events. Participated in the study 37 students of the 2nd year of the Degree in Basic Education, who attended a university in the north of Portugal. The data were obtained through the application of a questionnaire with several tasks about different types of events, and in the study the data resulting from the answers given by the students to only one task with four items, involving the classification, definition and formulation of complementary events were used. In terms of results, it is noteworthy that more than half of the students were able to classify events as complementary or non-complementary and formulate examples of complementary events, but very few adequately justified their answers. Students, on the other hand, had more difficulty in defining complementary events, with about one in three enunciating the definition correctly. However, even students who presented correct and complete definitions had difficulty in applying these definitions to justify the classification of events in complementary or non-complementary and the exemplification of complementary events, which highlights the need for students to practice such justifications.

Keywords: Probability; complementary events; prospective teachers; primary school.

¹  Doutor em Educação, área de Metodologia do Ensino da Matemática, pela Universidade do Minho (UM). Professor associado aposentado da Universidade do Minho, Campus de Gualtar, Portugal, jfernandes@ie.uminho.pt. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2015-160X>.



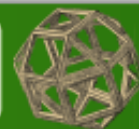
Introdução

Ultimamente, vários investigadores vêm defendendo o ensino de Probabilidades e Estatística nos primeiros anos escolares (Batanero, 2013; Borovcnik; Peard, 1996), e até mesmo na educação infantil (Alsina, 2021; Batanero et al., 2021; Nikiforidou; Pange, 2010). Em consequência, vem-se assistindo à introdução destes temas nos documentos curriculares, sejam de tipo oficial ou profissional, desde as primeiras idades (e.g., Brasil, 2018; Ministério da Educação, 2021, 2023; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014; National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Portanto, na generalidade dos países, vem-se assistindo à introdução e aprofundamento do estudo dos temas de Probabilidades e Estatística. Concretamente, em Portugal, os temas de Probabilidades e/ou Estatística fazem parte do programa da disciplina de matemática de todos os anos do ensino básico, portanto, do 1.º ao 9.º ano de escolaridade (Ministério da Educação, 2021). Prosseguindo para o ensino secundário, os alunos, seguindo também o programa da disciplina de matemática, terão de estudar um tema de Probabilidades ou de Estatística em cada um dos três anos escolares deste ciclo de estudos (Ministério da Educação, 2023).

Perante as mudanças curriculares, deve-se averiguar se os professores em exercício bem como os futuros professores possuem uma formação que lhes permita desenvolver um ensino adequado dos novos conteúdos introduzidos, em especial nos primeiros anos escolares uma vez que os temas de Probabilidades e Estatística só recentemente fazem parte dos programas escolares, donde os professores há mais tempo na profissão poderão não ter estudado essas temáticas durante a sua formação inicial.

Embora seja da maior relevância ter em conta as orientações recentes para o ensino de Probabilidades e Estatística (Fernandes; Diniz, 2022), futuros professores dos primeiros anos têm dificuldades no ensino de Probabilidades e Estatística (Rodríguez, 2014). Relacionado com o presente estudo, investigações anteriores têm demonstrado que futuros professores dos primeiros anos revelam dificuldades no tema de Probabilidades, designadamente em formular acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes (Fernandes; Barros, 2021), em classificar, definir e formular acontecimentos incompatíveis ou disjuntos (Fernandes, 2022), em relacionar



acontecimentos incompatíveis e complementares (Fernandes; Oliveira Júnior, 2023) e em calcular probabilidades de acontecimentos envolvendo conectivos lógicos (Fernandes, 2018).

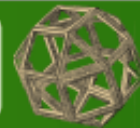
A importância do estudo dos diferentes tipos de acontecimentos resulta da sua aplicação no estudo de outros conceitos probabilísticos. Por outro lado, adotando como critérios a ligação ao mundo real, a criação de modelos da realidade e a manipulação dos próprios modelos, Green (1982) estabeleceu uma lista das ideias fundamentais de Probabilidades, nas quais inclui, para além de outros conceitos, os acontecimentos incompatíveis, a probabilidade condicionada e a independência. Deste modo, o autor destaca a importância do estudo de diversos tipos de acontecimentos em Probabilidades.

Neste contexto, no artigo estuda-se o desempenho de futuros professores dos primeiros anos em acontecimentos complementares, a partir dos três objetivos seguintes: 1) verificar se dois acontecimentos dados são ou não complementares; 2) enunciar a definição de acontecimentos complementares; e 3) formular exemplos de acontecimentos complementares. Comparativamente com o estudo de Fernandes (2022), em que se formularam os mesmos objetivos para acontecimentos incompatíveis, o presente estudo amplia aquele estudo ao pesquisar os acontecimentos complementares e permitir estabelecer comparações do desempenho dos estudantes nos acontecimentos incompatíveis e complementares.

Depois de apresentado e justificado o estudo, na próxima secção desenvolve-se o enquadramento teórico, em que se trata a abordagem conceitual de acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes e reveem-se estudos prévios sobre a aprendizagem de tais acontecimentos, e segue-se a secção de metodologia, na qual se caracteriza o estudo realizado, os participantes e os métodos de recolha e análise de dados. Na secção seguinte apresentam-se os resultados do estudo organizados a partir dos objetivos estabelecidos e na última secção, de conclusões e implicações, apresentam-se as principais conclusões do estudo, confrontando-as com a literatura revista e extraindo consequências para a formação dos futuros professores.

Enquadramento teórico

Nesta secção abordaremos os acontecimentos probabilísticos segundo duas perspetivas distintas: na primeira trataremos os acontecimentos numa vertente conceitual



e na segunda reveem-se alguns estudos prévios sobre acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes.

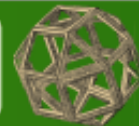
Tratamento conceitual dos acontecimentos

A realização de uma experiência aleatória permite obter qualquer um dos seus resultados possíveis, os quais conjuntamente definem o chamado espaço ou universo de resultados. Portanto, no conjunto, que constitui o espaço de resultados, podemos considerar qualquer um dos seus subconjuntos, subconjuntos esses que definem os acontecimentos associados à experiência aleatória.

Os acontecimentos podem classificar-se segundo diferentes critérios, dando origem a variados tipos de acontecimentos, designadamente: acontecimentos certos, possíveis (mas não certos), impossíveis, incompatíveis (ou disjuntos ou mutuamente exclusivos), complementares e independentes. Os acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis envolvem apenas um acontecimento e definem-se através de subconjuntos do espaço de resultados, respectivamente, o próprio espaço de resultados (certo), um subconjunto diferente e não vazio do espaço de resultados (possível mas não certo) e o subconjunto vazio (impossível). Portanto, sendo estes tipos de acontecimentos relativamente simples de identificar e formular, os alunos iniciam, em Portugal, o seu estudo logo no 3.º ano de escolaridade (Ministério da Educação, 2021).

Já os acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes referem-se a dois acontecimentos que satisfazem certas condições, respectivamente, a sua interseção é o acontecimento impossível (incompatíveis), a sua interseção é o acontecimento impossível e a sua reunião o acontecimento certo (complementares) e a probabilidade da realização de um dos acontecimentos não depende da realização do outro (independentes). Assim, tratando-se de tipos de acontecimentos mais complexos, em termos de definição e de formulação, eles são estudados em anos escolares mais avançados: os acontecimentos incompatíveis e complementares são introduzidos no 9.º ano (Ministério da Educação, 2021) e os acontecimentos independentes são introduzidos no 12.º ano (Ministério da Educação, 2023).

No caso do presente estudo interessam-nos os acontecimentos complementares, sendo que eles devem satisfazer as duas seguintes relações: a reunião é o espaço de resultados, ou seja, é o acontecimento certo, e a interseção é o acontecimento impossível,



que equivale a dizer que os acontecimentos são incompatíveis. Portanto, dois acontecimentos são complementares se eles são incompatíveis e a sua reunião é o espaço de resultados, o que equivale a afirmar que um dos acontecimentos é o contrário do outro.

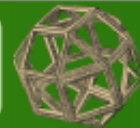
De acordo com Oliveira (1990), a definição formal de probabilidade assenta nos três axiomas seguintes: 1) $P(A) \geq 0$, sendo A um acontecimento qualquer; 2) $P(U) = 1$, sendo U o espaço de resultados; e 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, sendo A e B acontecimentos incompatíveis. Verifica-se, portanto, que no axioma 3) intervém a noção de acontecimentos incompatíveis e nos axiomas 2) e 3) está subjacente, implicitamente, a noção de acontecimentos complementares quando $A \cup B = U$. Daí resulta que $P(A \cup B) = 1$ e, portanto, $P(A) + P(B) = 1$, o que significa que os acontecimentos A e B são contrários. Conclui-se, assim, que a definição formal ou axiomática de probabilidade implica as noções de acontecimentos incompatíveis e complementares.

Em relação às definições de acontecimentos incompatíveis e independentes, Martins (2017) chama a atenção para a frequente confusão entre os conceitos referentes a estes dois tipos de acontecimentos, acrescentando que dois acontecimentos não podem ser incompatíveis e independentes simultaneamente, a não ser que um deles seja o acontecimento impossível. Para evitar tal confusão, a autora recomenda ter-se em atenção que estes conceitos exprimem relações diferentes: a incompatibilidade de acontecimentos é uma propriedade inerente aos acontecimentos, não sendo necessário definir qualquer probabilidade, e a independência de acontecimentos está dependente do modelo de probabilidade definido no espaço de resultados onde estão definidos os acontecimentos.

Estudos prévios

Porque estão mais ligados com o presente estudo, iremos, de seguida, rever estudos envolvendo acontecimentos certos, possíveis, impossíveis, incompatíveis, complementares e independentes.

Sobre acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis existem muitas investigações acerca da classificação e formulação de exemplos desses tipos de acontecimentos. Por exemplo, no estudo que realizaram, Fischbein, Nello e Marino (1991) verificaram que a maioria dos alunos do 4.º ao 8.º ano, que participaram no estudo, classificaram e definiram corretamente exemplos de acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis, nas experiências de lançamento de um dado e de girar

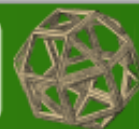


uma tómbola de jogo dividida em 90 partes iguais, revelando-se um pouco mais difícil a categoria dos acontecimentos certos e a formulação de exemplos. Os autores constataram, ainda, uma pequena melhoria das respostas com o ano escolar em todos os itens e com o estudo prévio de probabilidades na maioria dos itens.

Num estudo posterior, Barros (2003) verificou que quase todos os futuros professores dos primeiros anos, que participaram no estudo, classificaram e formularam corretamente exemplos de acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis, na experiência de girar uma tómbola de jogo dividida em 90 partes iguais e na extração de uma bola de um saco com bolas de três cores distintas. Em geral, confirmam-se os resultados obtidos por Fischbein, Nello e Marino (1991), mais próximos no 8.º ano, e a ligeira maior dificuldade na classificação e formulação de exemplos de acontecimentos certos.

Fernandes (2022) conduziu um estudo com futuros professores dos primeiros anos escolares sobre várias dimensões dos acontecimentos incompatíveis, designadamente: classificar acontecimentos dados em incompatíveis ou não incompatíveis; definir acontecimentos incompatíveis; e formular exemplos de acontecimentos incompatíveis. Em termos de resultados, em média, 78% dos estudantes classificaram corretamente os acontecimentos dados, mas apenas 16% o fizeram a partir de justificações corretas e completas, donde se constata que os estudantes tiveram grandes dificuldades em justificar as suas respostas. Já na definição e na formulação de acontecimentos incompatíveis os estudantes foram menos sucedidos, sendo que 59% dos estudantes apresentaram a definição correta e completa de acontecimentos incompatíveis e 68% apresentaram exemplos de acontecimentos incompatíveis, dos quais apenas 35% apresentaram respostas corretas e completas, o que denota novamente a dificuldade dos estudantes em justificar adequadamente as suas repostas.

Num estudo de Fernandes e Barros (2021) questionaram-se futuros professores dos primeiros anos escolares acerca de acontecimentos disjuntos, complementares e independentes. Mais especificamente, pediu-se aos estudantes para definirem pares de exemplos de acontecimentos disjuntos, complementares e independentes na experiência aleatória de lançamento de um dado duas vezes consecutivas. Os resultados neste estudo mostram que os estudantes sentiram muitas dificuldades em definir os acontecimentos pedidos, tendo-se obtido a percentagem de respostas corretas de 42% nos acontecimentos

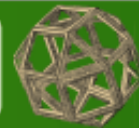


incompatíveis (mas não complementares), 13% nos acontecimentos complementares e 23% nos acontecimentos independentes. Constatou-se, portanto, que formular exemplos foi mais difícil nos acontecimentos complementares, seguiram-se os acontecimentos independentes e os acontecimentos incompatíveis (mas não complementares) foram os menos difíceis. Em outro estudo, Fernandes (2018) verificou que futuros professores dos primeiros anos consideraram como sendo incompatíveis acontecimentos não disjuntos, o que é contraditório.

Num estudo com alunos malaios do 4.º e do 6.º ano do ensino secundário (12-15 anos), Munisamy e Doraisamy (1998) constataram que se revelaram mais difíceis para os alunos os conceitos de frequência relativa, acontecimento complementar, acontecimentos compostos, lei aditiva de probabilidades e probabilidade condicionada. Os autores verificaram, ainda, que a lei de multiplicação de probabilidades foi particularmente difícil para os alunos. Portanto, novamente, os acontecimentos complementares se revelaram difíceis.

Num outro estudo, Fernandes e Oliveira Júnior (2023) questionaram futuros professores dos primeiros anos sobre relações existentes entre acontecimentos disjuntos e complementares: se acontecimentos disjuntos são complementares e reciprocamente, bem como se os contrários de acontecimentos disjuntos (complementares) são disjuntos (complementares). Na tarefa, com quatro itens, os estudantes deviam afirmar a verdade ou falsidade das relações declaradas e as correspondentes justificações. Relativamente à verdade/falsidade das relações, obteve-se, em média, 53% de respostas corretas por item, o que pode ser visto como um desempenho razoável. Já no caso das justificações, o desempenho piorou, verificando-se que por item, em média, 43% dos estudantes apresentaram justificações irrelevantes ou não apresentaram qualquer justificação. Dessas justificações, 21% são relativas a respostas corretas, o que agrava consideravelmente o desempenho dos estudantes. Mais, muitas das restantes justificações apresentam limitações em relação às definições e relações dos acontecimentos ou em relação à prova baseada num exemplo ou em diagramas de Venn.

Tendo por finalidade promover a aprendizagem dos conceitos de acontecimentos incompatíveis e complementares, Ramírez-Montes e Henriques (2018) implementaram uma intervenção de ensino exploratório (Canavarro, 2011) numa turma de alunos do 10.º ano, da Costa Rica, recorrendo à simulação no GeoGebra. Nas simulações determinavam-



se valores de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$ e estudava-se, de seguida, a relação $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, que permite identificar acontecimentos incompatíveis, e a relação $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, que permite identificar acontecimentos complementares. Dos resultados do estudo, os autores concluíram que a realização da tarefa exploratória permitiu aos alunos aprenderem aqueles conceitos, apesar de que alguns deles ainda sentiam algumas dificuldades nos acontecimentos complementares. Portanto, também neste estudo se constatou que os alunos sentiram mais dificuldades nos acontecimentos complementares do que nos acontecimentos incompatíveis.

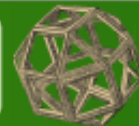
Metodologia

O estudo tem por propósito investigar o conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos, sobre acontecimentos complementares, a partir dos três objetivos seguintes: 1) verificar se dois acontecimentos dados são ou não complementares; 2) enunciar a definição de acontecimentos complementares; e 3) formular exemplos de acontecimentos complementares. O estudo do conceito de acontecimentos complementares a partir da definição do conceito, da classificação de exemplos e da formulação de exemplos permite estudar em maior abrangência a compreensão do conceito pelos estudantes (Skemp, 1993).

Para atingir os objetivos do estudo conduziu-se uma investigação, fundamentalmente, quantitativa e de natureza descritiva (McMillan; Schumacher, 2014), recorrendo-se à técnica de análise de conteúdo (Bardin, 2002) para estudar as justificações dadas pelos estudantes.

Participaram no estudo 37 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do norte de Portugal. À entrada na universidade, os estudantes tinham uma formação matemática variada obtida no ensino secundário em cursos profissionais, em cursos humanísticos ou em cursos científico-tecnológicos.

Os dados do estudo resultaram das resoluções dos estudantes ao responderem a um questionário com várias tarefas sobre diferentes tipos de acontecimentos, das quais tratamos aqui aquela que diz respeito a acontecimentos complementares, e que se mostra no Quadro 1. Aquando da aplicação do questionário, os estudantes já tinham frequentado a unidade curricular de Probabilidades e Estatística do ensino superior, tendo-se



assegurado o anonimato dos estudantes e a salvaguarda da confidencialidade dos participantes em qualquer publicação com dados do estudo.

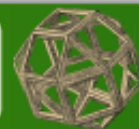
Quadro 1: Tarefa proposta aos estudantes.

1. Em cada alínea seguinte, verificar se os acontecimentos **A** e **B** são ou não complementares, sendo:
 - a. **A**: “obter um número par” e **B**: “obter um número inferior a 4”, na experiência aleatória de lançamento de um dado numerado de 1 a 6.
 - b. **A**: “obter pelo menos uma face escudo” e **B**: “obter duas faces cara”, na experiência aleatória de lançamento de duas moedas ao ar.
2. Relativamente a uma experiência aleatória,
 - a. Defina quando é que dois acontecimentos **A** e **B** são complementares.
 - b. Defina dois acontecimentos **A** e **B**, diferentes dos que foram definidos na questão 1, que sejam complementares.

Fonte: Elaboração do autor (2022)

A tarefa proposta contém duas questões, com um total de quatro itens. Nos itens 1a e 1b, da questão 1, é dado um par de acontecimentos relativo à experiência aleatória de lançamento de um dado e de lançamento de duas moedas, respectivamente, e interrogam-se os estudantes sobre se os acontecimentos são ou não complementares. Em termos de resposta, espera-se que os estudantes verifiquem que os acontecimentos não são complementares em 1a e são complementares em 1b. Da questão 2, no item 2a é pedido aos estudantes que enunciem a definição de acontecimentos complementares, esperando-se que estabeleçam as relações $A \cap B = \emptyset$ (acontecimento impossível) e $A \cup B = U$ (acontecimento certo), em que A e B são dois acontecimentos, eventualmente, substituindo uma ou ambas as relações pelas probabilidades $P(A \cap B) = 0$ e $P(A \cup B) = 1$, ou um enunciado equivalente em linguagem corrente. Por fim, no item 2b, tratando-se de um item de resposta aberta, espera-se que os estudantes formulem dois acontecimentos complementares de uma experiência aleatória, diferentes dos que foram referidos nos itens 1a e 1b.

Finalmente, no tratamento e análise de dados estudaram-se as respostas dadas pelos estudantes relativamente à classificação de acontecimentos em complementares e não complementares, às justificações dessa classificação e à definição e exemplificação de acontecimentos complementares. Em todos os casos, determinaram-se frequências dos tipos de acontecimentos (complementares e não complementares) e das justificações das respostas, organizadas em corretas e completas, incompletas e/ou com erros e totalmente incorretas, que constituem as categorias da análise de conteúdo. Por fim, recorreu-se a



tabelas para resumir essa informação. Complementarmente, tendo em vista aprofundar a compreensão do processo de análise, apresentam-se alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 37).

Apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados do estudo, organizados segundo cada um dos seus objetivos, ou seja: classificar acontecimentos em complementares ou não complementares; enunciar a definição de acontecimentos complementares e formular exemplos de acontecimentos complementares.

Classificar acontecimentos em complementares ou não complementares

Nos dois itens da questão 1, esperava-se que os estudantes verificassem que não são complementares os acontecimentos do item 1a e que são complementares os acontecimentos do item 1b, explicando as razões das suas respostas. A seguir analisam-se as respostas dadas pelos estudantes em cada um desses itens.

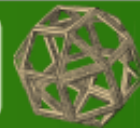
Item 1a. Neste item verificou-se que 25 (68%) estudantes responderam que os acontecimentos não são complementares, que é a resposta correta, 9 (24%) responderam que são complementares e 3 (8%) não responderam. Face a estes resultados, constata-se que cerca de dois em cada três estudantes classificou corretamente que os acontecimentos não são complementares.

Seguidamente, para aprofundar a compreensão dos estudantes, analisam-se as justificações por eles referidas no processo de obtenção das suas respostas. Na Tabela 1 apresentam-se as frequências (em %) dos tipos de justificações avançados pelos estudantes, segundo o tipo de acontecimentos complementares e não complementares.

Tabela 1: Frequências (em %) dos tipos de justificação no item 1a.

Justificação	Acontecimentos		Total
	Complementares	Não complementares	
Correta e completa	—	5 (14)	5 (14)
Incompleta e/ou com erros	6 (16)	18 (49)	24 (65)
Sem justificação	3 (8)	2 (5)	5 (14)

Fonte: Elaboração do autor (2023)



Pela Tabela 1 verifica-se que mais de metade dos estudantes apresentaram justificações incompletas e/ou com erros, seguindo-se, com igual percentagem, mas muito inferior, aqueles que apresentaram justificações corretas e completas e os que não apresentaram qualquer justificação.

No caso das justificações corretas e completas, um estudante verificou que os acontecimentos não são incompatíveis, três mostraram que a união dos acontecimentos não é o espaço de resultados e um mostrou que os acontecimentos não são incompatíveis nem a sua união é o espaço de resultados. Note-se que na verificação de que dois acontecimentos são não complementares basta mostrar que não se verifica uma das condições: os acontecimentos não são incompatíveis ou a sua união não é o espaço de resultados. Ora, neste item, o facto de os acontecimentos não verificarem nenhuma das duas condições contribuiu para mais estudantes apresentarem justificações corretas e completas, já que no caso de não se verificar apenas uma das duas condições menos estudantes teriam apresentado justificações corretas e completas. Na Figura 1 apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 1 – Resposta apresentada pelo estudante E30 no item 1a.

$$A = \{2, 4, 6\} \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

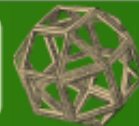
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \neq U$$

R.: Logo, como $A \cup B \neq U$, os acontecimentos não são complementares.

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na sua resposta, o estudante E30 começa por definir os acontecimentos A , B e U (espaço de resultados) em extensão e, seguidamente, determina o conjunto $A \cup B$. Ao verificar que $A \cup B \neq U$, o estudante conclui que os acontecimentos não são complementares

Já as justificações incompletas e/ou com erros foram muito variadas, destacando-se decisões tomadas com base em probabilidades, a confusão entre acontecimentos e probabilidades e a ausência de aplicação aos acontecimentos dados de definições e propriedades implicados na definição de acontecimentos complementares. Além disso, salienta-se que alguns estudantes indicaram valores de probabilidades sem indicarem a sua origem e bastantes estudantes (18) definiram os acontecimentos A e B , eventualmente com erros. Destes últimos, metade recorreram a uma representação em diagrama de Venn



para definirem o espaço de resultados. Nas Figuras 2 e 3 apresentam-se dois exemplos de justificações deste tipo.

Figura 2 – Resposta apresentada pelo estudante E11 no item 1a.

Os acontecimentos A e B não são complementares porque a interseção de A com B não é impossível.

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Nesta resposta, o estudante E11 afirma que a interseção dos acontecimentos A e B não é o acontecimento impossível, o que é suficiente para concluir que esses acontecimentos também não são complementares. Contudo, o estudante devia ter verificado que essa afirmação se cumpria para os acontecimentos A e B , o que não fez, partindo da suposição que se cumpria.

Figura 3 – Resposta apresentada pelo estudante E34 no item 1a.

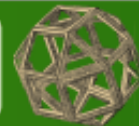
A: 2, 4, 6 B: 1, 2, 3

A sua interseção $P(A \cap B)$ é 2, logo não são complementares.

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Já o estudante E34 define os acontecimentos A e B e representa-os num diagrama de Venn, donde é evidente que o resultado 2 é comum aos dois acontecimentos e, portanto $A \cap B \neq \emptyset$. Todavia, o estudante considera 2 como sendo a $P(A \cap B)$, confundindo acontecimentos com probabilidades. Também a atribuição do valor 2 à probabilidade é paradoxal uma vez que qualquer probabilidade é um valor do intervalo $[0,1]$.

Apesar de se ter referido antes que muitos estudantes identificaram corretamente os acontecimentos como sendo não complementares, constata-se, agora, que a maior parte dessas respostas baseou-se em justificações incompletas e/ou com erros ou não apresentaram mesmo qualquer justificação. Deste modo, este tipo de justificação ou a ausência de justificação põe em causa a compreensão dos estudantes acerca do conceito de acontecimentos complementares, pois, constata-se que, de entre os estudantes que classificaram corretamente os acontecimentos em não complementares, cerca de quatro em cada cinco desses estudantes recorreram àquela justificação ou não apresentaram qualquer justificação. Admitindo que os estudantes têm uma compreensão algo vaga do



conceito, pode afirmar-se que eles tiveram dificuldades em expressar verbalmente o seu entendimento.

Item 1b. Neste item constatou-se que 23 (62%) estudantes responderam que os acontecimentos são complementares, que é a resposta correta, 11 (30%) responderam que não são complementares e 3 (8%) não responderam. Também neste item se verifica que uma elevada percentagem de estudantes identificou corretamente que os acontecimentos são complementares, com essa percentagem a diminuir um pouco em relação ao item anterior.

Na continuação, com o propósito de aprofundar a compreensão dos estudantes, analisam-se as justificações por eles referidas para explicarem as suas respostas. Na Tabela 2 apresentam-se as frequências (em %) dos tipos de justificação avançados pelos estudantes, segundo o tipo de acontecimentos complementares e não complementares.

Tabela 2: Frequências (em %) dos tipos de justificação no item 1b.

Justificação	Acontecimentos		Total
	Complementares	Não complementares	
Correta e completa	2 (5)	—	2 (5)
Incompleta e/ou com erros	19 (51)	7 (19)	26 (70)
Sem justificação	2 (5)	4 (11)	6 (16)

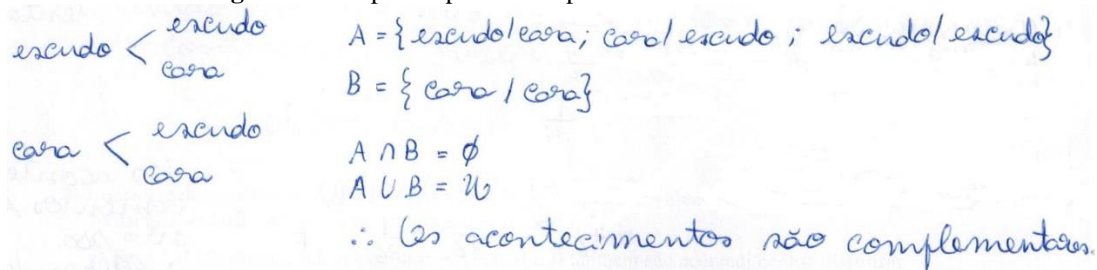
Fonte: Elaboração do autor (2023)

Pela Tabela 2 constata-se que as justificações incompletas e/ou com erros continuam a ser largamente maioritárias, ainda mais do que no item anterior, seguindo-se as respostas sem qualquer justificação e, por fim, as justificações corretas e completas.

Apenas em duas respostas se apresentam justificações corretas e completas. Nessas justificações, os dois estudantes verificaram que os dois acontecimentos são complementares, mostrando que eles cumprem, simultaneamente, as duas condições: $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$. Na Figura 4 apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação.



Figura 4 – Resposta apresentada pelo estudante E23 no item 1b.

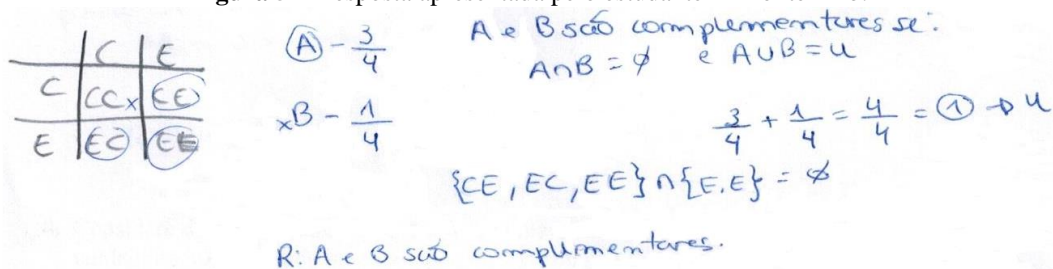


Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na resposta apresentada, o estudante E23 recorre a um diagrama de árvore para representar os resultados da experiência aleatória e utiliza esses resultados para definir os acontecimentos A e B . De seguida, refere que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$, resultados que possivelmente determina mentalmente sem sentir necessidade de os explicar, e conclui que os acontecimentos são complementares.

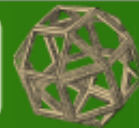
Mais do que dois em cada três estudantes apresentaram justificações incompletas e/ou com erros, salientando-se aquelas que se baseiam em probabilidades, em que se confundem acontecimentos e probabilidades, em que se referem as condições genéricas da definição de acontecimentos complementares ($A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$) sem as aplicar aos acontecimentos dados e em que consideram tratar-se de uma experiência aleatória simples em vez de uma experiência aleatória composta. Ainda, bastantes estudantes (14) definiram o espaço de resultados, algumas vezes com erros, dos quais a maior parte (8) recorreu a uma tabela de dupla entrada para o representar. Na Figura 5 apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 5 – Resposta apresentada pelo estudante E4 no item 1b.



Fonte: Elaboração do estudante (2022)

O estudante E4 recorre a uma tabela de dupla entrada para representar os resultados da experiência aleatória, mas define erradamente o acontecimento B , que é (cara, cara). Depois, regista as duas condições que os acontecimentos complementares têm de verificar



e conclui que se cumprem. No caso de $A \cap B$ conclui erradamente que é igual ao \emptyset e no caso de $A \cup B$ baseia-se em probabilidades que considera como sendo acontecimentos.

Como no item anterior, também neste, a maioria dos estudantes classificaram corretamente os acontecimentos dados em complementares, embora quase todos a partir de justificações incompletas e/ou com erros ou sem apresentarem qualquer justificação. Neste item apenas dois estudantes apresentaram uma justificação correta e completa para mostrarem que os acontecimentos são complementares. Portanto, novamente, a análise das justificações questiona a adequada compreensão dos estudantes acerca do conceito de acontecimentos complementares.

Enunciar a definição de acontecimentos complementares

No item 2a, da questão 2, questionam-se os estudantes sobre a definição de acontecimentos complementares, tendo-se obtido os resultados que constam da Tabela 3.

Tabela 3: Frequências (em %) dos tipos de justificação no item 2a.

Definição	Frequência (em %)
Correta e completa	14 (38)
Incompleta e/ou com erros	14 (38)
Totalmente incorreta	9 (24)

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Pela Tabela 3 verifica-se que um pouco mais de um em cada três estudantes apresentaram definições corretas e completas, o mesmo acontecendo com as definições incorretas e/ou com erros e cerca de um em cada quatro estudantes apresentou uma definição totalmente incorreta. Conclui-se, assim, que mais estudantes definiram corretamente acontecimentos complementares do que classificaram acontecimentos dados em complementares ou não complementares (itens 1a e 1b).

As definições corretas e completas consistiram em afirmar as duas relações $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$, ou seja, que a interseção dos acontecimentos é o acontecimento impossível (acontecimentos incompatíveis) e a sua união é o acontecimento certo (espaço de resultados). Ainda, alguns estudantes afirmaram que um acontecimento deve ser contrário do outro ou envolveram na definição que apresentaram probabilidades dos acontecimentos, nomeadamente, que $P(A \cap B) = 0$ e/ou $P(A \cup B) = 1$. Na Figura 6 apresenta-se um exemplo de definição correta e completa.

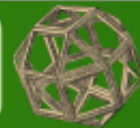


Figura 6 – Resposta apresentada pelo estudante E16 no item 2a.

A e B são complementares se e só se o acontecimento interseção de A com B for um acontecimento impossível e, simultaneamente, o acontecimento reunião de A com A for um acontecimento certo

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na definição que apresenta, o estudante E16 usa, fundamentalmente, o registo verbal para referir que os acontecimentos devem verificar as condições: a sua interseção é o acontecimento impossível (são acontecimentos incompatíveis) e a sua reunião é o acontecimento certo (é o espaço de resultados). Observa-se, ainda, que o estudante considera a “reunião de A com A” em vez da “reunião de A com B”, o que deve ter sido um lapso de escrita.

Foram consideradas definições incompletas e/ou com erros aquelas que apresentavam alguns atributos da definição de acontecimentos complementares, mas não todos. Destas justificações, destacam-se aquelas em que apenas se afirma que a união dos acontecimentos é o espaço de resultados (8), as que apenas referem que os acontecimentos devem ser incompatíveis (5) e a definição de acontecimento contrário (1). Na Figura 7 apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação

Figura 7 – Resposta apresentada pelo estudante E12 no item 2a.

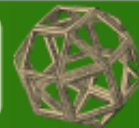
Dois acontecimentos são complementares quando a sua reunião é igual ao universo, isto é, $A \cup B = U$

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na sua resposta, o estudante E12 define acontecimentos complementares como sendo aqueles cuja união é o espaço de resultados, omitindo que a interseção desses acontecimentos deve ser o acontecimento impossível.

Por último, consideraram-se definições totalmente incorretas as que não afirmavam qualquer atributo da definição de acontecimentos complementares. Ao todo, foram nove os estudantes que apresentaram definições deste tipo, salientando-se que cinco afirmaram uma das relações: $A \cap B \neq \emptyset$ ou $A \cap B = U$, para concluírem que qualquer delas determina que os acontecimentos são complementares.

O facto de mais estudantes terem sido capazes de definir acontecimentos complementares (item 2a) do que verificar se os acontecimentos dados são ou não



complementares (itens 1a e 1b) mostra que os estudantes tiveram dificuldades em aplicar a definição à classificação de acontecimentos.

Formular exemplos de acontecimentos complementares

Por último, no item 2b pede-se aos estudantes para definirem dois acontecimentos complementares distintos daqueles que tinham sido dados antes, nos itens 1a e 1b. A partir da análise das respostas, verificou-se que 20 (54%) estudantes apresentaram exemplos de acontecimentos complementares, 15 (41%) apresentaram exemplos de acontecimentos não complementares e 2 (5%) não responderam.

Embora mais de metade dos estudantes tenham dado exemplos de acontecimentos complementares, uma análise mais detalhada das respostas revelou falhas em muitas das respostas, como se pode verificar na Tabela 4, onde se apresentam as frequências (em %) dos tipos de justificação avançados pelos estudantes segundo o tipo de acontecimentos complementares e não complementares.

Tabela 4: Frequências (em %) dos tipos de justificação no item 2b.

Justificação	Acontecimentos		Total
	Complementares	Não complementares	
Correta e completa	10 (27)	—	10 (27)
Incompleta e/ou com erros	10 (27)	14 (38)	24 (65)
Incompreensível	—	1 (3)	1 (3)

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Pela Tabela 4 verifica-se que metade dos estudantes que indicaram exemplos de acontecimentos complementares apresentaram respostas incompletas e/ou com erros, o que novamente questiona a sua compreensão do conceito de acontecimentos complementares, tal como já tinha acontecido quando da classificação de acontecimentos em complementares e não complementares (itens 1a e 1b).

Cerca de um estudante em cada quatro apresentou uma resposta correta e completa, na qual é enunciada a experiência aleatória implicada e são definidos os dois acontecimentos complementares. Na Figura 8 é apresentado um exemplo deste tipo de resposta.

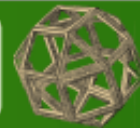


Figura 8 – Resposta apresentada pelo estudante E10 no item 2b.

A: "sair duas bolas brancas" e B: "sair pelo menos uma bola preta",
na experiência aleatória de extrair 2 bolas de um saco que
contém 3 bolas brancas e 2 bolas pretas.

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

A resposta do estudante E10 envolve a extração de duas bolas de um saco, portanto uma experiência aleatória composta. Apesar de se ter omitido se essa extração é feita com ou sem reposição da primeira bola extraída, isso não interfere com o tipo de resposta porque em ambos os casos os acontecimentos são complementares.

Na globalidade dos acontecimentos complementares e não complementares, verifica-se que quase dois em cada três estudantes apresentaram justificações incompletas e/ou com erros. Neste tipo de resposta, além de outras falhas, realça-se que a maior parte destes estudantes (17) não referiram a experiência aleatória relativa aos acontecimentos. Dos estudantes que mencionaram a experiência aleatória, salientam-se as experiências aleatórias de lançamento de um dado (11), seguindo-se girar uma roleta (3), extrair um objeto de um saco (2) e extrair dois objetos de um saco ou duas cartas de um baralho (2).

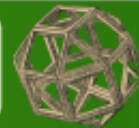
Nos exemplos de acontecimentos não complementares, além da não indicação da experiência aleatória, destaca-se a indicação de acontecimentos não incompatíveis (9) e cuja união não é o espaço de resultados (3). Na Figura 9 apresenta-se um exemplo deste tipo de resposta.

Figura 9 – Resposta apresentada pelo estudante E22 no item 2b.

A: "Obter um número ímpar"
B: "Obter um número inferior a 3"

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na resposta do estudante E22 omite-se a experiência aleatória subjacente aos acontecimentos e, na hipótese de os resultados da experiência resultarem do lançamento de um dado, numerado de 1 a 6, verifica-se que os acontecimentos referidos não são incompatíveis (1 é um valor comum) e a sua união também não é o acontecimento certo (não pertencem à união todos valores pares superiores a 2). Portanto, os acontecimentos não satisfazem nenhuma das duas condições da definição de acontecimentos complementares.

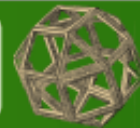


Conclusões e implicações

Neste estudo indagaram-se estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, sobre a classificação, definição e exemplificação de acontecimentos complementares. Na classificação de um par de acontecimentos dados em complementares ou não complementares (itens 1a e 1b), verificou-se que, em média, 65% dos estudantes responderam corretamente em cada item. Contudo, raramente essas respostas foram justificadas adequadamente, observando-se que, em média, apenas 9% dos estudantes apresentaram justificações corretas e completas. Já as justificações incompletas e/ou com erros foram apresentadas, em média, por 68% dos estudantes, nas quais se faz uso inapropriado de probabilidades para classificar acontecimentos em complementares ou não complementares, se confunde acontecimentos com probabilidades e se refere a definição ou propriedades de acontecimentos complementares sem os aplicar aos acontecimentos dados.

Quando se pediu aos estudantes para enunciarem a definição de acontecimentos complementares (item 2a), constatou-se que apenas 38% dos estudantes apresentaram uma definição correta e completa. Também 38% dos estudantes apresentaram respostas incompletas e/ou com erros, salientando-se, neste caso, a referência a apenas uma das duas condições da definição de acontecimentos complementares: a união dos acontecimentos é o acontecimento certo ($A \cup B = U$) ou a intersecção dos acontecimentos é o acontecimento impossível ($A \cap B = \emptyset$). Neste último caso, os estudantes confundem acontecimentos incompatíveis com acontecimentos complementares. Finalmente, as definições totalmente incorretas, nas quais não se refere qualquer atributo da definição de acontecimentos complementares, foram adotadas por 24% dos estudantes. Perante estas dificuldades, pode questionar-se se os estudantes se limitam a memorizar as definições, sem as compreenderem verdadeiramente, o que explicaria a dificuldade em as aplicar aos restantes itens do estudo e, assim, apresentarem justificações corretas e completas.

Por último, quando se pediu aos estudantes para darem um exemplo de dois acontecimentos complementares (item 2b), verificou-se que 54% dos estudantes foram capazes de o fazer. Todavia, apenas metade desses exemplos constituíam uma resposta correta e completa. Já na globalidade das respostas constatou-se que 65% das respostas



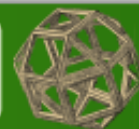
eram incompletas e/ou continham erros, destacando-se, nessas respostas, a não referência à experiência aleatória associada aos acontecimentos.

No estudo de Fernandes (2022), em que participaram também futuros professores dos primeiros anos, estudaram-se acontecimentos incompatíveis a partir de três objetivos análogos, obteve-se um desempenho um pouco melhor do que no presente estudo em todos os objetivos. A maior dificuldade dos acontecimentos complementares pode explicar-se pelo facto de eles deverem ser incompatíveis e a sua reunião ter de ser o acontecimento certo, portanto requer-se a verificação de mais uma condição comparativamente com os acontecimentos incompatíveis.

Já no estudo de Fernandes e Barros (2021) pediu-se a futuros professores dos primeiros anos que dessem exemplos de acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes. No que interessa ao presente estudo, verificou-se que os estudantes tiveram um pior desempenho nos acontecimentos complementares do que nos acontecimentos incompatíveis, o que confirma a maior dificuldade experimentada pelos estudantes nos acontecimentos complementares do presente estudo. Por outro lado, comparativamente com o presente estudo, os estudantes tiveram um pior desempenho na formulação de acontecimentos, o que se poderá dever a pedir-se para definir acontecimentos na experiência de lançamento de um dado duas vezes consecutivas, que é uma experiência aleatória composta, e os estudantes, geralmente, têm mais dificuldades nesse tipo de experiências (Fernandes; Gea; Batanero, 2016). Esta explicação parece plausível uma vez que os estudantes apresentaram, quase sempre, exemplos de acontecimentos complementares associados a experiências simples, a maioria das vezes referentes ao lançamento de um dado.

Conforme foi antes sintetizado, os estudantes sentiram muitas dificuldades na classificação, definição e formulação de acontecimentos complementares. Todas essas dificuldades denotam um substrato teórico dos estudantes débil e pouco integrado (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980), o qual deve ser aprofundado para que os futuros professores possam vir a desenvolver um ensino adequado.

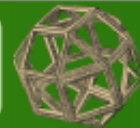
Para obviar tais limitações dos estudantes, pode ser vantajoso começar por introduzir os acontecimentos incompatíveis e complementares explorando a definição, classificação e exemplificação desses conceitos, tal como aconteceu na tarefa aqui explorada, assim como clarificar a relação entre eles (Fernandes; Oliveira Júnior, 2023).



No caso da relação entre acontecimentos incompatíveis e complementares, para além da identificação dos atributos que os distinguem, pensamos ser importante confrontar os estudantes com exemplos que eles devem classificar. Acrescenta-se, ainda, que também parece promissor a implementação de um ensino exploratório e com recurso à simulação, tal como Ramírez-Montes e Henriques (2018) experimentaram. Tenha-se em conta que, também neste caso, recorrendo a probabilidades dos acontecimentos, se destaca a aplicação dos atributos implicados na definição de acontecimentos complementares.

Referências bibliográficas

- ALSINA, Á. (2021). “Ça commence aujourd'hui”: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. **PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v. 15, n. 4, p. 243-266, 2021.
- AUSUBEL, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2002.
- BARROS, P. M. **Os futuros professores do 2.º ciclo e a estocástica: dificuldades sentidas e o ensino do tema**. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Minho, Braga, 2003.
- BATANERO, C. La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In: ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA, 3, 2013, Braga. **Proceedings...** Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2013.
- BATANERO, C.; ÁLVAREZ, R. A.; HERNÁNDEZ, L. A. S.; GEA, M. M. S. El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. **PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v. 15, n. 4, p. 267-288, 2021.
- BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: BISHOP, A. J. et al. (Eds.). **International handbook of mathematics education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 239-287.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.



FERNANDES, J. A. Classificação, definição e formulação de acontecimentos disjuntos por futuros professores dos primeiros anos escolares. **Revista de Educación Estadística**, Talca, v. 1, n. 1, p. 1-18, 2022.

FERNANDES, J. A. Probabilidade de acontecimentos envolvendo aspetos lógicos. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 172-190, 2018.

FERNANDES, J. A., & OLIVEIRA JÚNIOR, A. P. Relacionar acontecimentos disjuntos e complementares. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, Juiz de Fora, v. 7, n. 1, p. 1-21, 2023.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Definir acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes. **Indagatio Didactica**, Aveiro, v. 13, n. 1, p. 31-42, 2021.

FERNANDES, J. A.; Diniz, L. N. Ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Fundamental da Base Nacional Comum Curricular do Brasil. **Góndola, Enseñ Aprend Cienc**, Bogotá, v. 17, n. 2, p. 392-406, p. 2022.

FERNANDES, J. A.; GEA, M. M.; BATANERO, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. In: MACÍAS, J. A. et al. (Eds.). **Investigación en Educación Matemática XX**. Málaga: SEIEM, 2016. p. 217-225.

FISCHBEIN, E.; NELLO; M. S.; MARINO, M. S. Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 6, p. 523-549, 1991.

GREEN, D. R. **Probability concepts in 11-16 year old pupils**. Tese (Doutorado em Matemática), Loughborough University of Technology, Loughborough, 1982.

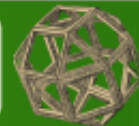
MARTINS, E. G. M. Acontecimentos independentes. **Revista de Ciência Elementar**, Porto, v. 5, n. 4, p. 1-4, 2017.

MCMILLAN, J.; SCHUMACHER, S. **Research in education: evidence-based inquiry**. 7. ed. Harlow: Pearson, 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Básico**. Lisboa: Direção-Geral da Educação, 2021.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Secundário**. Lisboa: Direção-Geral da Educação, 2023.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. **Real Decreto 126/2014**, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Madrid: Autor, 2014.



MUNISAMY, S.; DORAISAMY, L. Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 29, n. 1, p. 39-45, 1998.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: Autor, 2000.

NIKIFORIDOU, Z.; PANGE, J. The notions of chance and probabilities in preschoolers. **Early Childhood Education Journal**, Dordrecht, v. 38, n. 4, p. 305-311, 2010.

OLIVEIRA, J. T. **Probabilidades e Estatística: conceitos, métodos e aplicações**. Lisboa: McGraw-Hill, 1990.

RAMÍREZ-MONTES, G.; HENRIQUES, A. A aprendizagem dos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares com recurso ao GeoGebra. In: PEDRO, A.; PIEDADE, J.; MATOS, J. F.; DOROTEA, N.; PEDRO, N. (Eds.). **Atas do V Congresso Internacional das TIC na Educação**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2018. p. 780-793.

RODRÍGUEZ, L. F. Probabilidad y estadística para grado primero desde los organizadores curriculares. **Góndola, Enseñ Aprend Cienc**, Bogotá, Bogotá, v. 9, n. 2, p. 44-59, 2014.

SKEMP, R. R. **The psychology of learning mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.