EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS:
Pesquisa em Educação Matemática

CONTRA A ORTODOXIA ÉPSILON-DELTA: UM MANIFESTO EM DEFESA DO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM INFINITÉSIMOS

AGAINST EPSILON-DELTA ORTHODOXY: A MANIFESTO IN DEFENSE OF THE TEACHING OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS WITH INFINITESIMALS

Maurício Chiarello[1]

Resumo

O trabalho que aqui se apresenta pode ser lido como um manifesto em defesa de uma metodologia de ensino do Cálculo Diferencial e Integral que se apoia no emprego deliberado e ostensivo dos elementos infinitesimais, privilegiando as concepções mais intuitivas e espontâneas dos alunos. Nesse sentido, um manifesto em favor da adoção das mais diversas abordagens baseadas, direta ou indiretamente, na *análise não-standard* desenvolvida por Abraham Robinson no início dos anos 1960, que reabilitou os elementos infinitesimais para a análise. Ademais, o presente trabalho delineia um conjunto de temáticas de pesquisa relevantes para balizar um trabalho de investigação futuro, cuja finalidade última consiste na definição detalhada de estratégias didáticas alternativas, bem como na elaboração de material didático correspondente, capazes de tornar mais exitoso o processo de ensino-aprendizagem, nos cursos superiores, da matéria de Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral; Cálculo infinitesimal; Elementos infinitesimais; Análise não-*standard*; Educação matemática.

Abstract

The work presented here can be read as a manifesto in defense of a teaching methodology for Differential and Integral Calculus that is based on the deliberate and ostentatious use of infinitesimal elements, privileging the students' most intuitive and spontaneous conceptions. In this sense, a manifesto in favour of the adoption of the most diverse approaches based, directly or indirectly, on the non-standard analysis developed by Abraham Robinson in the early 1960s, which rehabilitated the infinitesimal elements for analysis. Furthermore, the present work outlines a set of relevant research themes to guide future research work, whose ultimate purpose consists of the detailed definition of alternative teaching strategies, as well as the elaboration of corresponding teaching material, capable of making successful the teaching learning process of Differential and Integral Calculus’s subject in higher education courses

Keywords: Teaching Differential and Integral Calculus; Infinitesimal Calculus; Infinitesimal elements; Non-standard analysis; Mathematical education.

[1] Doutor em filosofia pelo IFCH da Unicamp. Membro da Associação Filosófica Scientiae Studia. E-mail: chiarello@scientiaestudia.org.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2982-5853

Considerações iniciais

A recriminação endereçada aos elementos infinitesimais acompanha toda a história da matemática ao longo da qual desenvolveu-se e consolidou-se o Cálculo Diferencial e Integral. Durante séculos, foram acusados de serem entidades logicamente inconsistentes, quando não imaginárias e, portanto, inexistentes como entidades matemáticas. Mesmo antes da publicação dos trabalhos de Newton e Leibniz que apresentaram as formulações seminais do Cálculo, em meados do século XVII, a desconfiança para com estas entidades controversas se fez sentir, como nas reiteradas críticas endereçadas aos trabalhos de John Wallis e Buenaventura Cavallieri, que introduziram o método dos indivisíveis. Uma sentença de George Berkeley, que se tornou célebre, bem denota o desdém destinado aos elementos infinitesimais poucas décadas após a publicação dos trabalhos de Newton e Leibniz. De forma muito espirituosa, escreveu ele certa vez: "Os elementos infinitesimais não são nem quantidades finitas, nem quantidades infinitamente pequenas, nem mesmo nada. Não seria justo denominá-los fantasmas de quantidades defuntas?" (BERKELEY, 2010, p. 660)[2]. A despeito de seu tom jocoso, não há como negar que a *boutade* de Berkeley acerta em cheio, captando não só o aspecto paradoxal dessas entidades, mas também seu caráter algo ilusório porquanto artificioso. Séculos mais tarde, Felix Klein introduziu uma pequena modificação nessa sentença, trocando *ghost* por *spirit*: "Um infinitesimal é o espírito de uma quantidade que findou" (KLEIN, 1945, p. 217)[3]. A verdade é que mesmo Leibniz – a quem devemos, junto com Newton, a fundação do Cálculo – não julgava possível sustentar a existência efetiva dessas entidades matemáticas, dada sua falta de consistência lógica. Em uma correspondência, ele chegou a considerá-las apenas ficções, como as raízes imaginárias da álgebra, mas "ficções úteis", uma vez que sua utilidade se lhe afigurava inquestionável

[2] Tradução ligeiramente modificada pelo autor. A sentença original encontra-se em "*The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*", de 1734: "*They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them ghosts of departed quantities*?"

[3] Na edição inglesa da obra de Klein, lemos: "*An infinitesimal is the spirit of a departed quantity*". A rigor, a frase mencionada foi extraída por Klein do livro de Lübsen, *Einleitung in die Infinitesimalrechnung*, publicado em 1855.

(cf. LEIBNIZ, 2012, p. 176)[4]. Ao descrever variações contínuas e suaves em termos de diferenças infinitamente pequenas, os infinitesimais permitiam resolver problemas complexos de maneira mais elegante e eficiente do que os métodos geométricos tradicionais.

Defendendo que as formulações da análise deveriam fundamentar-se em princípios mais sólidos e consistentes, Laplace argumentou contra o emprego de infinitesimais[5]. Outros grandes matemáticos também o fizeram. De fato, a tentativa de fundamentar a análise de forma consistente desde muito cedo buscou livrar-se desses elementos controversos e carregados de contradição. Em um trabalho publicado quase no mesmo ano em que o de Laplace, Joseph-Louis Lagrange acreditou ter sido bem sucedido ao apresentar os princípios do Cálculo infinitesimal por meios estritamente matemáticos[6], isto é, sem qualquer referência a esses elementos tão caros aos metafísicos – uma vez que sua natureza abstrusa incita a especulação – e que Kant havia postulado, quinze anos antes, na sua *Crítica da razão pura*, como sendo o próprio princípio transcendental da análise. Assim fazendo, Kant considerara os infinitesimais não como entidades matemáticas concretas, mas como um conceito da intuição pura que permite à mente humana realizar operações analíticas (cf. NOLASCO, 2013).

Foi somente em meados do século XIX, dois séculos depois das formulações inaugurais do Cálculo infinitesimal propostas por Newton e Leibniz, que uma constelação de trabalhos realizados por Weirstrass, Dedekind e Cantor mostrou-se bem sucedida em sanar as inconsistências envolvidas na abordagem com infinitesimais. O movimento que então se desenvolveu ficou conhecido como "aritmetização da análise" e culminou na consolidação da análise *standard* (AS). Ela introduziu o conceito de limite e inaugurou um novo paradigma da continuidade, que passou a ser definida a partir de uma espécie de aritmética dos números reais sobre a reta. A antiga concepção geométrica/física da continuidade foi abandonada e, desde então, deixou de haver lugar para os elementos infinitesimais. Consequentemente, seu emprego passou a ser amplamente condenado.

---

[4] O texto original da epístola ao matemático Dangicourt encontra-se em: LEIBNIZ (1768).

[5] A argumentação encontra-se na obra *Exposition du système du monde*, originalmente publicada no ano de 1796 (cf. LAPLACE, 2009).

[6] Referimo-nos à obra *Théorie des Fonctions Analytiques, contenant les Principes du Calcul Différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment pétits, d'évanouissants, de limites et des fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*, publicada originalmente em 1797 (cf. LAGRANGE, 1797).

O longo processo que culminou na aritmetização da análise representou um inegável ganho no que diz respeito à conquista de formulações rigorosas e consistentes. Contudo, dado o elevado grau de abstração dessas formulações baseadas em lógica simbólica, esse ganho trouxe consigo um aumento considerável na dificuldade de compreensão da matéria, sobretudo quando a metodologia de ensino empregada se apoia preponderantemente, quando não exclusivamente, nas formulações da análise *standard* – como tem sido a regra nos cursos superiores do país até os dias de hoje.

Para lançar luz sobre a dificuldade que enfrenta o processo de ensino-aprendizagem da matéria de Cálculo Diferencial e Integral pautado pela aritmetização da análise, seria esclarecedor aludir à apreciação crítica que Hegel endereçou aos infinitesimais. Isso porque o pendor idealista da dialética hegeliana guarda grande afinidade com a diretriz formalista do pensamento matemático que pautou a análise *standard*. Esse pendor não permite que o pensamento, em seu movimento dialético, se demore – tanto quanto seria preciso – sobre esse elemento singular que se lhe figura absurdo e contraditório como, aliás, todo elemento afeito ao âmbito da experiência sensível. Para Hegel, seu destino inexorável é ser subsumido pelo universal no conceito. No entanto, por mais que o pensamento procure abstrair-se da experiência concreta, erigindo-se como sistema formal autônomo e consistente, capaz de se desenvolver independentemente da realidade externa a partir de suas próprias leis intrínsecas, mais cedo ou mais tarde revela-se incompleto e insuficiente, necessitando recorrer aos resíduos da experiência concreta mais imediata que presidiram sua formulação desde o princípio. Assim é que, nas formulações da análise *standard*, o elemento infinitesimal se apresenta de forma sub-reptícia, como uma espécie de resíduo inalienável da experiência concreta, sem referência ao qual as formulações da análise *standard* se afiguram deveras complexas, quando não abstrusas.

Buscando ilustrar a argumentação apresentada acima, poderíamos nos referir a um tópico particular bastante emblemático, entre tantos outros tópicos que compõem a matéria de Cálculo Diferencial e Integral nos quais o elemento infinitesimal ainda perdura como resíduo: ao tópico de limites.

Com efeito, segundo as formulações da análise *standard* que embasam a imensa maioria dos livros didáticos de Cálculo avançado adotados nos cursos superiores de nosso país, tanto a definição de derivada como a definição de integral deixam de recorrer explicitamente aos elementos infinitesimais, uma vez que passam a ser definidos de forma rigorosa por um limite específico. No entanto, o operador limite, malgrado o rigor simbólico utilizado em sua definição, não deixa de carregar os vestígios da noção infinitesimal. Talvez tenha ficado, até mesmo, sobrecarregado por essa noção controversa e paradoxal. Senão, vejamos. Partamos do caso mais simples em que o limite no ponto existe. Dizemos, então, que "o limite de uma certa função $f(x)$, quando x tende a p, é igual a L". Ora, essa singela e sucinta expressão, "quando x tende a p", exige que consideremos um valor de x "infinitamente próximo de p, sem que seja igual a p", ou "tão próximo de p quanto se queira, mas sem jamais coincidir com p". Além disso – e todo docente de Cálculo Diferencial e Integral bem conhece a dificuldade de aprendizado deste ponto específico – dizer que o limite de uma função é *igual* a L não significa dizer que a função tem valor igual a L "quando x tende a p", mas sim que seu valor se encontra "infinitamente próximo" de L. A propósito, vale lembrar que o bom entendimento do critério de continuidade proposto pela análise *standard* depende justamente dessa correta compreensão do significado de limite. Afinal, segundo esse critério, uma função será contínua em determinado ponto se e somente se o valor do limite no ponto coincidir com o valor da função no ponto, o que nem sempre acontece. Com efeito, caso não coincida, ou caso o limite no ponto não exista, comprova-se que a função é descontínua no ponto.

A questão fica ainda mais complicada quando se trata de compreender o intricado critério de existência do limite no ponto. É quando, a partir da definição *épsilon-delta* de Weirstrass, somos obrigados a imaginar que $f(x)$ esteja contida em um intervalo centrado em L de amplitude ε (*épsilon*), sendo ε "tão pequeno quanto se queira", quando x está contido em um intervalo centrado em p de amplitude δ (*delta*), sendo δ também "tão pequeno quanto se queira". Isso não é outra coisa senão imaginar que x deva ser considerado infinitamente próximo de p, sem jamais vir a coincidir com p. Ora, não é o próprio elemento infinitesimal que ressurge aqui, nessa diferença entre x e p? Uma diferença que tende a zero sem ser zero absolutamente, que é evanescente, mas sem jamais desaparecer por completo... Exatamente como aquele espírito (*revenant*) de uma quantidade que findou, da *boutade* de Berkeley!

Percebe-se, assim, que a noção de infinitesimal não foi completamente suplantada na definição de limite de Weirstrass. Sua presença se faz sentir como vestígio. No entanto, o fato de não se apresentar explicitamente, mas de forma sub-reptícia, termina por aumentar consideravelmente a dificuldade de compreensão da matéria. Esse é o aspecto decisivo para o qual gostaríamos de chamar a atenção. A propósito, querem tornar ainda maior o desafio de compreender esse critério relativo à existência do limite e, por extensão, da continuidade no ponto? Façam, então, a experiência de procurar explicar o referido critério, que requer deduzir a existência ou não daquele δ, mencionado acima, a partir de um certo ε "tão pequeno quanto se queira", recorrendo única e exclusivamente à lógica simbólica, isto é, sem fazer qualquer referência à imagem do gráfico da função capaz de evidenciar as eventuais descontinuidades do tipo salto ou do tipo interrupção pontual. Todo aquele que um dia se deparou com esse tópico crítico da disciplina, seja ele professor ou aluno, entenderá perfeitamente as imensas dificuldades de ensino-aprendizagem aqui aludidas, e que se tornam praticamente insuperáveis quando a curva da função não é visualizada. Ora, essa dificuldade não é fortuita. Vale lembrar que um dos desideratos do movimento de aritmetização da análise foi justamente este: abolir toda intuição geométrica.

Fazendo uma apreciação sobre o movimento de aritmetização da análise, o matemático norte-americano James Pierpont observou, em certa ocasião, que poucos eram os matemáticos de seu tempo que nutriam verdadeira simpatia por ele. E ironizou acrescentando que parecia "uma inútil perda de tempo provar pelos trabalhosos métodos ε e δ aquilo que os métodos antigos provam tão satisfatoriamente com poucas palavras" (PIERPONT, 1899, p. 395). Mas aquilo que o desagradava na aritmetização da análise não era isto, propriamente, pois ele reconhecia a incontestável superioridade de uma demonstração consistente. O que realmente o desagradava era a completa segregação do mundo da intuição e dos sentidos que nela se consumava. Era um preço demasiado alto a pagar por uma formulação logicamente rigorosa e absolutamente livre de contradições (consistente). Como ele mesmo escreveu na ocasião:

> temos dois mundos, o mundo dos nossos sentidos e da intuição, e o mundo dos números. Os objetos do primeiro mundo dão ensejo à formação de certos objetos no mundo dos números, que nos esforçamos para que correspondam ao primeiro da melhor forma possível. […] Construídas sobre a simples noção de número, suas verdades são as mais solidamente estabelecidas em todo o campo do conhecimento humano. Não se deve, contudo, esquecer que o preço pago por esta certeza é terrível: é a segregação total do mundo dos nossos sentidos (PIERPONT, 1899, pp. 406-7. Tradução de minha autoria).

O fato é que, mesmo depois que o método rigoroso dos limites foi consagrado pelas formulações da análise *standard*, a referência aos elementos infinitesimais não deixou de ser feita na matemática. A razão para essa tenaz persistência dos infinitesimais na análise talvez deva ser procurada, como ponderou acertadamente Félix Klein, “na necessidade amplamente sentida de, para além da formulação lógica abstrata do método dos limites, penetrar na natureza intrínseca das grandezas contínuas, e de formar imagens mais claras e definidas dessas grandezas” (KLEIN, 1945, p. 217). Corroborando essa apreciação, reiterou ele ainda a importância decisiva da apreensão sensível para o desenvolvimento dos conceitos de cálculo infinitesimal, afirmando:

> É precisamente na descoberta e no desenvolvimento do cálculo infinitesimal que este processo indutivo, construído sem etapas lógicas convincentes, desempenhou um papel tão importante; e a ajuda heurística eficaz era muitas vezes a percepção sensorial. E quero dizer aqui a percepção sensorial imediata, com toda a sua imprecisão, para a qual uma curva é um traço de largura definida, em vez de uma percepção abstrata que postula uma passagem completa até o limite, produzindo uma linha unidimensional (KLEIN, 1945, p. 208. Tradução de minha autoria).

Feito esse breve preâmbulo, cumpre dizer que o trabalho que aqui se apresenta pode ser lido como um manifesto em defesa de uma metodologia de ensino do Cálculo Diferencial e Integral que se apoia no emprego deliberado e ostensivo dos elementos infinitesimais, privilegiando as concepções mais intuitivas e espontâneas dos alunos. Nesse sentido, um manifesto em favor da adoção das mais diversas abordagens baseadas, direta ou indiretamente, na *análise não-standard* desenvolvida por Abraham Robinson no início dos anos 1960, que reabilitou os elementos infinitesimais para a análise.

Sua motivação profunda decorre de uma constatação, que diz respeito à enorme dificuldade manifestada pelos estudantes no aprendizado dos conceitos fundamentais da matéria, sobretudo quando o ensino se faz estritamente pautado pela ortodoxia da análise *standard*, que embasa a quase totalidade das obras didáticas de Cálculo Diferencial e Integral adotadas nos cursos de nível universitário de nosso país. Essa contatação resulta de uma experiência pessoal do autor ao longo de vinte anos de magistério da disciplina em cursos de ensino superior, e é corroborada por um sem-número de trabalhos já publicados sobre o tema, que igualmente evidenciam as altíssimas taxas de reprovação na matéria. Ao lado desta chocante constatação, põe-se uma outra, relativa ao inegável ganho de compreensão da matéria alcançado quando se recorre explicitamente aos elementos infinitesimais na definição dos operadores derivada e integral. No entanto – e isso causa enorme perplexidade –, sempre foi muito baixa a aceitação, por parte dos cursos superiores brasileiros, de uma metodologia de ensino-aprendizagem alternativa pautada pela análise não-*standard*, na qual o recurso aos elementos infinitesimais se veja reabilitado. Essa baixa receptividade fica patente pela inexistência, em nosso mercado editorial, de obras didáticas de Cálculo Diferencial e Integral baseadas na análise não-*standard* traduzidas para o português. Mas também pela ausência de divulgação da edição original dessas obras como bibliografia complementar nos cursos universitários. Com efeito, são praticamente desconhecidas, no Brasil, as obras de Cálculo Infinitesimal elaboradas por Jerome Keisler, Heinle & Kleinberg, K. D. Stroyan, David Tall, J. L. Bell e Michael O'Connor, entre outras. Ora, essa baixa receptividade se dá malgrado o êxito obtido pelas abordagens alternativas não-*standard* em uma série de estudos de caso realizados ao longo das últimas décadas, o que é documentado por um bom número de trabalhos já publicados, muitos deles inclusive nacionais. Como explicar essa baixa aceitação? A que ela se deve? Quais fatores poderiam explicá-la e o que caberia ser feito para contornar a resistência a ela, favorecendo sua adoção nos cursos superiores do país?

Buscando responder estas e outras questões correlatas, que despontam quando se almeja, por meio da adoção de estratégias didáticas alternativas, melhorar a compreensão da matéria de Cálculo Diferencial e Integral e aumentar o aproveitamento dos estudantes, o presente trabalho delineia um conjunto de temáticas de pesquisa extremamente relevantes para balizar um trabalho de investigação futuro. Elas aqui se põem sob a forma de um convite, endereçado aos muitos pesquisadores da área, na esperança de que possam despertar seu interesse e nortear o desenvolvimento de um trabalho investigativo por vir, que poderia até mesmo se consolidar como um amplo projeto de pesquisa coletivo.

São em número de quatro as linhas temáticas de investigação capazes de, a nosso ver, abarcar a problemática envolvendo o ensino de Cálculo infinitesimal na sua totalidade:

i) uma primeira linha de pesquisa consiste em investigar as dificuldades de natureza epistemológicas inerentes ao aprendizado da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, concedendo especial atenção aos aspectos presentes na análise *standard* (também conhecida como abordagem por limites de Weierstrass) passíveis de oferecer dificuldades ao aprendizado, notadamente em razão de seu caráter formal e abstrato, correlato ao banimento da noção de infinitesimal;

ii) uma segunda linha de investigação procura explorar, de forma geral, as vantagens proporcionadas por uma metodologia de ensino da disciplina que faça apelo à intuição, recorrendo ostensivamente à noção de elementos infinitesimais, cuja apreensão se faz mais natural e espontânea;

iii) buscando identificar pontos positivos e negativos para o ensino-aprendizagem da matéria, uma terceira linha de pesquisa trataria de realizar uma apreciação minuciosa e crítica dos mais relevantes livros didáticos de Cálculo infinitesimal publicados até a presente data, os quais se baseiam nas principais abordagens resultantes da reabilitação dos infinitesimais, quais sejam:

- análise infinitesimal *não-standard* simples (de Keisler)
- análise infinitesimal *não-standard* axiomática (de Nelson)
- análise infinitesimal suave (de Bell)
- análise infinitesimal paraconsistente (de Newton da Costa)

iv) por fim, uma quarta linha de investigação busca identificar os motivos, ou a gama de fatores, que permitiriam explicar porque, até os dias de hoje, a abordagem da disciplina por meio dos métodos infinitesimais baseados na análise *não-standard* não foi capaz de se impor de forma duradoura no ensino.

Como já afirmamos, as linhas de pesquisa esboçadas acima destinam-se a balizar um conjunto de estudos futuros sobre o tema, que podem ser desenvolvidos paulatinamente ao longo do tempo, quer por grupos de pesquisa consolidados, quer por pesquisadores isolados. Vale observar que as duas primeiras linhas de investigação já contam com um bom número de trabalhos publicados, os quais se encontram referenciados na última secção deste trabalho. O mesmo não se pode dizer das duas últimas. A terceira temática, em especial, malgrado sua grande relevância, conta com desenvolvimentos ainda muito incipientes. Seu delineamento é uma contribuição original do presente trabalho – que endereça uma recomendação especial para que os esforços de pesquisa futuros venham a se concentrar mormente sobre ela.

No que segue, realizamos uma exposição mais detalhada de cada uma destas quatro linhas temáticas de investigação.

Sobre as dificuldades de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

Buscar bem compreender as dificuldades de natureza epistemológicas inerentes ao aprendizado da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, eis o tema desta linha de pesquisa. Consideramos, para tanto, que conhecer a história ao longo da qual a humanidade adquiriu e consolidou um determinado corpo de saberes e conhecimentos não apenas possibilita que entendamos em maior profundidade esse corpo de conhecimentos. Também permite descortinar dificuldades epistemológicas e, a partir delas, orientações valiosas a respeito dos métodos mais apropriados para levar a bom termo o processo de ensino-aprendizagem deste corpo de conhecimentos. Nesse sentido, acreditamos ser bastante instrutivo respaldar-se em uma analogia que pode ser estabelecida entre o desenrolar da história da matemática, como construção humana coletiva, e o processo de aprendizado de matemática avançada por parte do sujeito cognoscente. A analogia deve buscar explorar a afinidade existente entre as transformações que levaram ao advento da matemática moderna, com o estabelecimento de novos paradigmas epistemológicos, e a mudança de perspectiva cognoscente exigida do sujeito, em nosso caso o aluno que deixa o ensino médio e ingressa no ensino superior, acompanhadas das dificuldades de aprendizado que lhe são próprias. Pensamos aqui, em primeira instância, no salto que leva da geometria euclidiana para a geometria analítica; bem como no salto que conduz das figuras poligonais finitas para as figuras delimitadas por curvas que, podendo ser decompostas *ad infinitum*, passam a ser concebidas como resultantes de um processo de composição infindo, do qual participam elementos infinitesimais.

No entanto, para além destes saltos epistemológicos aludidos, é preciso ainda considerar que o conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral aborda, de uma só vez, um corpo de conhecimentos que se consolidou, no decorrer da história, mediante um delongado e complexo processo de elaboração intelectual que exigiu, em verdade, a consumação de duas importantes mudanças de paradigma. A primeira consistiu na mencionada passagem da geometria sintética, de molde euclidiano, para a análise infinitesimal consagrada por Newton e Leibniz. Essa mudança, promovida ao longo do século XVII, coloca em cena os infinitesimais, os quais, embora amiúde recriminados como elementos logicamente inconsistentes ou mesmo inexistentes, passam a ser aceitos e largamente empregados em razão do êxito inegável alcançado pela análise infinitesimal na resolução de inúmeros problemas. A segunda mudança de paradigma consumou-se bem mais tarde, em meados do século XIX, a partir da assim chamada “crise dos fundamentos da matemática”. Buscando sanar as inconsistências envolvidas na abordagem com infinitesimais, foi levada a efeito sobretudo pelos trabalhos de

Weirstrass, Dedekind e Cantor, os quais, a partir do desenvolvimento da chamada "aritmetização da análise", culminaram na consolidação da análise *standard* (AS) – a que já nos referimos na introdução. Essa segunda mudança introduziu o conceito de limite e inaugurou um novo paradigma do contínuo. A partir de então, a linha geométrica plena de elementos infinitesimais deixa de ser referência para definição do contínuo e, em seu lugar, põe-se a reta de números reais. Uma vez que os números reais foram formalmente construídos como um corpo ordenado e completo, deixou de haver lugar para os infinitesimais e, consequentemente, seu emprego passou a ser amplamente condenado.

Com a consagração da aritmetização da análise, portanto, saem de cena os elementos infinitesimais introduzidos pela primeira mudança de paradigma, os quais desempenharam um papel decisivo, quando não indispensável, nas formulações originárias do Cálculo Diferencial e Integral. Basta ter em mente as surpreendentes reviravoltas dessa história envolvendo os elementos infinitesimais para convir que não se pede pouco dos alunos quando deles se exige que, em apenas um semestre, aprendam a contento os conceitos mais elementares dessa disciplina! E, com mais forte razão, quando, na exposição da matéria, suprime-se o processo de construção conceitual do qual tomaram parte os infinitesimais, fazendo com que, em seu lugar, a lógica abstrata do método dos limites, atinente à aritmetização da análise, seja apresentada como a formulação não só definitiva como exclusiva, porquanto livre de inconsistências. Isto é, como a formulação capaz de suplantar todo o desenvolvimento conceitual que a precedeu, dispensando o recurso à noção de infinitesimal – tal como se dá na abordagem que se tornou hegemônica da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, sendo ainda hoje a mais amplamente adotada[7].

Em defesa da análise com infinitesimais no ensino

Em vista do enorme desafio de aprendizagem que encerra a exigência de assimilar essa dupla mudança de paradigma aludida, e buscando garantir melhor compreensão do significado matemático dos conceitos envolvidos na disciplina, consideramos apropriado

[7] A respeito das dificuldades em geral oferecidas pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, ver as obras elencadas no item "Sobre as dificuldades de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral", disposto na secção "Indicações bibliográficas para trabalhos futuros". Entre elas, cumpre destacar os trabalhos de W. M. Rezende, que tratam das dificuldades de ordem epistemológica.

defender uma metodologia de ensino que fizesse, em um primeiro momento, mais apelo à intuição em detrimento do rigor analítico, recorrendo, para tanto, ao tratamento da matéria mediante o emprego ostensivo de elementos infinitesimais. A análise formal rigorosa e consistente, formulada em termos de limites, seria apresentada de forma complementar em um segundo momento, assim como, ao longo da história da matemática, foi apenas muito tempo depois de a abordagem com infinitesimais ter sido introduzida e empregada exitosamente que análise *standard* veio a se consolidar, resolvendo as contradições e inconsistências que se apresentam na abordagem inicial mais intuitiva.

Destarte, o *leitmotiv* da proposta metodológica de ensino que aqui se defende apoia-se nas operações com infinitesimais, privilegiando o recurso às concepções mais intuitivas e espontâneas dos alunos no processo de construção do pensamento formal rigoroso e consistente. À semelhança da desejável reincorporação do momento imagético e sensível por parte de um sistema de pensamento formal e abstrato, pretende-se advogar que os infinitesimais devem ser reabilitados em prol do bom desenrolar do processo de aprendizado. Isto porque preparam de modo conveniente a passagem para um novo paradigma epistemológico, mais rigoroso e formal. Mas não só. Também porque os infinitesimais permanecem como vestígio; como é sabido, eles continuam presentes em diversos tópicos do programa de Cálculo avançado. No entanto, figuram via de regra de forma sub-reptícia ou mesmo clandestina, uma vez que foram proscritos pela análise *standard*, que acabou sendo adotada de forma hegemônica. Neste sentido, sua reincorporação na exposição contribuiria para diminuir a estranheza e a dificuldade de compreensão de tais tópicos.

Para desenvolver a argumentação favorável às metodologias de ensino de Cálculo avançado que recorrem ostensivamente aos elementos infinitesimais, seria oportuno aludir ao fato de que o elemento infinitesimal figura como um elemento mais afeito ao âmbito da experiência sensível, capaz de ser espontaneamente intuído pela imaginação e percebido como integrante do mundo físico. Assim, por exemplo, na experiência do mundo externo, pela visão da linha geométrica contínua; na vivência interior, pela intuição do fluir contínuo do tempo. Ele se apresenta como o elemento que, embora indispensável para a elaboração conceitual, termina por ser renegado como inconsistente, uma vez que a abstração conceitual se autonomiza e se consolida como formalismo rigoroso isento de contradições. Ora, justamente porque a geometria é vista como um resíduo da experiência sensível, a diretriz formalista do movimento de aritmetização da análise buscou expurgar o recurso a ela. Com efeito, este movimento que levou à consolidação da análise *standard*, na segunda metade do século XIX, visava eliminar toda intuição geométrica das demonstrações em análise, caracterizando-se fundamentalmente pelo desiderato de elaboração conceitual clara e rigorosa, bem como por uma revalorização da lógica.

A este respeito – e ainda em favor da abordagem com infinitesimais – não seria descabido formular a seguinte questão, a título de provocação: a análise *standard* teria, de fato, conseguido superar integralmente as formulações de Cálculo com infinitesimais? Ou algo se perdeu nesta passagem? Afinal, o que exatamente teria motivado o movimento subsequente de reabilitação dos elementos infinitesimais (a que vamos nos referir logo em seguida) e sua promoção como valiosa perspectiva complementar? Refletindo certa vez sobre essa questão, Félix Klein fez uma ponderação deveras perspicaz, já aludida nas considerações iniciais, que vale ser mencionada mais extensamente. Escreveu ele a respeito:

> A razão pela qual tais reflexões [sobre quantidades infinitesimais] perduraram por tanto tempo [ao lado] do método matematicamente rigoroso dos limites deve ser procurada, muito provavelmente, na necessidade amplamente sentida de, para além da formulação lógica abstrata do método dos limites, penetrar na natureza intrínseca das grandezas contínuas, e de formar imagens mais claras e definidas dessas grandezas do que as fornecidas pela ênfase exclusiva no momento cognoscente consubstanciado pelo conceito de limite (KLEIN, 1945, p. 217. A tradução é de minha autoria).

Dessa observação acertada depreende-se que o banimento dos infinitesimais, promovido pela aritmetização da análise, termina por privar os estudantes da possibilidade de compreender de forma mais significativa os conceitos nela desenvolvidos, mas não só. Também priva os estudantes da possibilidade de conceder à noção de infinitesimal, que nela ainda perdura como resíduo, um significado matemático mais facilmente apreensível pela imaginação, assim como espontaneamente percebido na imagem do mundo físico.

Com efeito, não há como negar a existência de uma gritante contradição entre as fórmulas fundamentais e intuitivamente claras do cálculo baseado nas concepções infinitesimais e a elaboração incomparavelmente artificial e complexa de sua justificação e de suas demonstrações formais empreendidas pela aritmetização da análise de

Weierstrass-Cantor. Um bom número de estudos assinala a enorme dificuldade que apresentam muitos alunos para efetuar a transição para a matemática formal, baseada em definições axiomáticas e deduções lógicas, a partir da matemática mais intuitiva e mesmo mais imaginativa que faz uso da noção de infinitesimal. Em contrapartida, outros estudos atestam a interação fecunda que se estabelece entre o emprego de infinitesimais e o ganho de conhecimento intuitivo a respeito dos tópicos de Cálculo avançado[8].

Essa mesma argumentação aqui esboçada, em defesa da importância que possuem os elementos infinitesimais no desenvolvimento da análise moderna, pode ainda ser formulada em termos da dialética existente entre intuição e rigor formal na construção do pensamento matemático, analisada em um bom número de estudos da área. Em especial, seria interessante desenvolver o tema apoiando-se nos estudos de David Tall que investigam a tensão existente entre infinitesimais intuitivos e análise formal, conceito imagem e conceito definição, interpretação geométrica e construção algébrica. Além desses estudos, também pode ser extremamente proveitoso o recurso aos trabalhos de Albert Lautman, que exploram o papel central e decisivo desempenhado pela intuição no desenvolvimento da matemática. No estudo Lautman (2006), em particular, o autor defende a intuição como uma ferramenta valiosa tanto na exploração de novos conceitos como no entendimento de problemas complexos. A intuição faculta um pressentimento do que pode ser verdadeiro ou relevante em um determinado contexto matemático, o que é especialmente útil quando os caminhos formais ainda não foram bem estabelecidos. Isso não significa que o recurso à intuição possa dispensar a formalização e a prova rigorosa na matemática. Lautman sustenta a existência de uma a relação simbiótica entre intuição e formalismo. A intuição pode sugerir direções promissoras de investigação, enquanto o formalismo fornece a estrutura para verificar, fundamentar e consolidar as conclusões. Além disso, o autor considera – e essa consideração mostra-se deveras relevante para a temática do presente trabalho, favorável ao ensino com infinitesimais – que a intuição pode levar a uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Ela pode ajudar a formar uma visão holística das conexões entre diferentes ideias matemáticas, permitindo ver além dos aspectos puramente mecânicos da manipulação simbólica proporcionados por uma concepção formalista. Por outro lado, o autor também reconhece os limites da

[8] Conferir, a esse respeito, as obras elencadas na secção “Indicações bibliográficas para trabalhos futuros”.

intuição, especialmente quando se lida com conceitos altamente abstratos ou complexos. Como a intuição pode ser enganosa ou insuficiente nestes casos, o rigor formal das demonstrações se faz necessário para garantir a validade das conclusões[9].

Sobre a reabilitação dos infinitesimais na análise

Cumpre observar que a proposta aqui delineada de reabilitação dos elementos infinitesimais na análise, notadamente como metodologia de ensino para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, nada tem de inaudita ou original. Com efeito, já na década de 1970, meio século atrás, uma proposta de teor assemelhado foi apresentada pela primeira vez sob a forma de um livro-texto destinado ao ensino do Cálculo infinitesimal. Referimo-nos à obra *Elementary Calculus: An infinitesimal approach*, de H. Jerome Keisler, publicada originalmente em 1976 (cf. KEISLER, 1976). Desde então, muitas outras abordagens formalmente consistentes adotando infinitesimais foram desenvolvidas e um grande número de obras didáticas, inspiradas nestas abordagens, veio a ser lançado. Todas elas tributárias de um movimento que se desencadeou, na história da matemática, a partir da consolidação da aritmetização da análise – e, em certa medida, como reação a ela – e que culminou da formulação da chamada análise *não-standard* (ANS) por Abraham Robinson na década de 1960.

Seria interessante retraçar, ainda que em rápidas pinceladas, a história de reabilitação dos controversos e desacreditados elementos infinitesimais, sobretudo porque ela remonta aos primórdios da corrente fenomenológica na filosofia da matemática do jovem Husserl. Interessante porque a história deslinda a estreita relação existente entre a noção de infinitesimal, atinente à problemática do contínuo, e a percepção (natural e espontânea) do tempo como fluxo contínuo. Com efeito, a concepção do contínuo temporal está na base da crítica endereçada por Husserl aos fundamentos da matemática estabelecidos pela aritmetização da análise. Segundo Husserl, o contínuo temporal não pode ser fragmentado em uma sucessão de “agoras” pontuais; todo agora não é um ponto discreto, mas um campo contínuo de instantes infinitesimais. Destarte, o objeto temporal tem, para Husserl, uma duração e o seu aparecimento à consciência tem

[9] A propósito da defesa do ensino de Cálculo com infinitesimais, ver as obras elencadas no item “Em prol da abordagem não-*standard* para ensino de Cálculo”, disposto na secção “Indicações bibliográficas para trabalhos futuros”. Os estudos de David Tall encontram-se arrolados neste item.

a forma de um *continuum* (cf. ALVES, 2006). No início de 1900, Hermann Weyl, que foi discípulo de Husserl, retoma essa crítica, afirmando que, assim como os instantes temporais não existem na experiência, mas são antes idealizações, também os números reais denotam a mesma situação limite para a continuidade aritmética. Ora, tal apreciação prepara o terreno para a retomada, na história da matemática, de uma concepção de continuidade que admite a existência de uma espécie de "campo sequencial contínuo de números reais", vale dizer, de elementos infinitesimais. A partir de então, passarão a coexistir duas perspectivas distintas de formalização da análise, fundamentadas em dois modos diferentes de se conceber a continuidade, uma afirmando outra negando a existência de infinitesimais.

Se os infinitesimais saíram de cena com a consolidação da AS, sobretudo depois que Georg Cantor, com a elaboração de sua Teoria dos Conjuntos, acreditou ter sido possível demonstrar a inexistência dessas entidades tão controversas, pouco tempo depois, algumas contribuições decisivas abriram o caminho para a construção de uma nova modalidade de análise baseada no emprego dos infinitesimais, mas agora de forma rigorosa e consistente. Entre 1933 e 1934, Skolem desenvolveu um modelo para a aritmética empregando números infinitos. Em 1948, Edwin Hewitt introduz o termo "hiper-real" e Yos', por sua vez, construiu números hiper-reais, contendo infinitésimos, a partir de uma extensão fechada do corpo ordenado dos números reais. Em 1961, Abraham Robinson, empregando teoria de modelos, apresentou uma teoria seminal para a análise matemática fundamentada nos infinitesimais que se tornou o marco inaugural da análise não-*standard*, como veio a ficar conhecido esse sistema consistente e rigoroso para tratamento dos números infinitesimais e infinitos. Segundo a análise não-*standard*, cada número real discreto admite, em sua vizinhança, elementos formados por uma sequência de números infinitamente próximos a ele, concepção perfeitamente condizente com os números infinitesimais que remontam às formulações originais de Leibniz. Com isso, a reta geométrica, tomada como paradigma do contínuo, passa a conter não apenas os números reais, mas também os infinitesimais e os números infinitos, inversos dos infinitesimais. Essa extensão dos números reais que engloba números infinitesimais e números infinitos foi denominada conjunto dos números hiper-reais. Se a reta real proposta pela aritmetização da análise constitui um "contínuo magro", porque não admite elementos infinitesimais, então, por contraste, a reta composta pelos números hiper-reais passa a constituir “um contínuo adensado ou espesso”.

A partir da formulação original da ANS realizada por Robinson, outras abordagens não-*standard* foram desenvolvidas ao longo dos últimos anos, sendo por vezes resultantes de reformulações da proposta original de Robinson. Baseadas nestas abordagens, foram então elaboradas diversas obras didáticas para o ensino de Cálculo com elementos infinitesimais, tendo como principal desiderato melhorar o entendimento e a aprendizagem da matéria. Buscando elencar as principais abordagens advindas da reabilitação dos infinitesimais, bem como as mais destacadas obras didáticas nelas baseadas, poderíamos mencionar as seguintes:

- *análise infinitesimal não-standard simples*

Abordagem resultante de uma reformulação simplificadora da axiomática da ANS de Abraham Robinson. O tratamento lógico também foi elidido na redação de livros-texto mais acessíveis. As obras didáticas de maior destaque foram elaboradas por Jerome Keisler, Heinle & Kleinberg e David Tall.

Obras didáticas da abordagem: Keisler (1976a); Keisler (1976b); Henle & Kleinberg (1979); Stroyan (1997); Tall (2012).

Referencial teórico da abordagem: Robinson (1966); Stroyan & Luxemburg (1976).

- *análise infinitesimal não-standard axiomática*

Abordagem também baseada na ANS de Robinson, mas enriquecida por um tratamento axiomático elegante proposto por Edward Nelson (1977), que requer menos lógica e teoria dos modelos.

Obras didáticas da abordagem: Deledicq & Diener (1989); Diener & Diener (1995).

Referencial teórico da abordagem: Nelson (1977).

- *análise infinitesimal suave*

Abordagem concebida a partir das ideias de F. W. Lawwere e baseada na teoria das categorias. Trata-se de uma proposta mais recente, na qual um infinitesimal é definido como um número nilpotente, isto é, um número não nulo cujo quadrado é nulo. As obras didáticas mais relevantes foram concebidas por J. L. Bell.

Obras didáticas da abordagem: Bell (1998); Bell (1999).

Referencial teórico da abordagem: O'Connor (2018); Moerdijk & Reyes (1991); Giordano (2010).

- *análise infinitesimal paraconsistente*

Abordagem do cálculo diferencial realizada a partir da lógica paraconsistente e da teoria para consistente de conjuntos desenvolvida notadamente por Newton da Costa.

Obras didáticas da abordagem: Carvalho (2004); D'Ottaviano & Carvalho (2005); Da Silva Filho (2014).

Referencial teórico da abordagem: Costa (1993); Costa (2000).

Convém ressalvar que não se propõe, no âmbito desta terceira temática, empreender um exame detalhado das diferentes abordagens originárias da ANS, muito menos realizar qualquer tipo de análise comparativa entre elas. Com enfoque na perspectiva de ensino-aprendizagem da matéria, o que se propõe é tomar como objeto de estudo as principais obras didáticas, publicadas até a presente data, que se consagraram como obras de referência da abordagem não-*standard* adotada. E, fundamentalmente, com um triplo propósito:

1) Procurar avaliar o quanto a obra didática sob análise logra facultar, mediante o emprego de infinitesimais, uma melhor compreensão do significado dos conceitos de continuidade, derivada e integral. Assim fazendo, buscar identificar quais seriam os aspectos ou elementos presentes na abordagem com infinitesimais adotada capazes de efetivamente auxiliar a consecução do salto epistemológico que conduz à boa compreensão da definição destes mesmos operadores, derivada e integral, feita por meio de limites, consoante às formulações rigorosas consagradas pela AS;

2) Buscar aquilatar o quanto seria frutífero apresentar, para bom entendimento da matéria, não só a definição matemática de derivada e integral, mas também o método de cálculo desses operadores mediante infinitesimais. Com outras palavras, considerar o proveito de apresentar o cálculo dos principais operadores do Cálculo avançado de dois modos: mediante infinitesimais, segundo ANS adotada, e, consecutivamente, pelo método dos limites, segundo AS. Consideramos aqui que o conhecimento de abordagens diferentes, mas complementares, possibilita melhor compreensão dos tópicos estudados, porquanto oferece perspectivas distintas de apreensão desses tópicos;

3) Procurar estabelecer a ordem mais apropriada para apresentação do conteúdo programático da disciplina, considerando que que cada um dos principais tópicos constitutivos (continuidade, derivada, integral, limite) devem ser abordados tanto a partir da ANS como também segundo a AS. Lembrar que, embora os operadores integral, derivada e limite tenham sido desenvolvidos nesta ordem no decurso da história da matemática, costumam ser apresentados justamente na ordem inversa da que foram desenvolvidos nos livros didáticos que seguem a metodologia de ensino tradicional, baseada na AS, e que compõem a imensa maioria dos livros didáticos.

Sobre o ensino de cálculo infinitesimal no Brasil. A respeito do emprego de abordagens não-*standard* para o ensino de Cálculo em território nacional, cumpre destacar a relevante contribuição fornecida pelos trabalhos de Roberto R. Baldino e Eliene B. Lima. Investigando propostas alternativas para o ensino de Cálculo em busca de melhores resultados no processo de ensino-aprendizado, sustentam os autores que o cálculo diferencial e integral e a análise matemática deveriam ser substituídos pelo cálculo infinitesimal e a pela análise *não-standard*. Vale ainda mencionar o grupo de pesquisa-ação em educação matemática coordenado pelos professores Roberto R. Baldino e Tania C. B. Cabral que, desde 1994, busca compreender a fundamentação do pensamento infinitesimal através do estudo da análise *não-standard* e de trabalhos clássicos da história da matemática (como os de Leibniz), com o intuito de produzir material para aplicação em salas de aula de Cálculo. Em 1995, propostas deste grupo de pesquisa foram colocadas em prática na disciplina de Cálculo para o curso de Física na Unesp-Rio Claro.

Sobre o êxito do ensino de Cálculo com infinitesimais

Ao longo das últimas décadas, um bom número de estudos atestou haver considerável ganho de aprendizado quando da adoção da abordagem não-*standard* no ensino de Cálculo. Para mencionar alguns, Sullivan (1976) apresenta o resultado de um experimento controlado envolvendo cinco escolas norte-americanas. O estudo concluiu que a adoção da obra de Keisler, *Elementary Calculus*, apresentava vantagens significativas sobre abordagem *standard* para o ensino de Cálculo. O'Donovan & Kimber (2006) também apresenta uma experiência com o ensino de Cálculo mediante infinitesimais, cuja apreciação foi positiva. Contudo, um outro trabalho publicado pouco tempo depois (cf. O'DONOVAN, 2007) reporta dificuldades pedagógicas com a abordagem não-*standard* do Cálculo, tanto a partir do livro didático de Keisler como de outros. Mais recentemente, Katz & Katz (2010) oferece um relato positivo a respeito de um curso de cálculo baseado no livro de Keisler.

Seja como for, apesar dos não poucos casos de sucessos relatados e das vantagens comprovadas, é preciso convir que a abordagem da disciplina por meio dos métodos infinitesimais não foi capaz de se impor, até a presente data, de forma duradoura no ensino. Essa constatação é feita por Hodgson (1994), entre outros.

Ora, acreditamos ser de enorme valor empreender uma investigação que busque identificar os fatores que têm dificultado ou mesmo impossibilitado a adoção da abordagem não-*standard* no ensino da disciplina de Cálculo, malgrado seu êxito comprovado pelos estudos documentados. Certamente, não se tem apenas um, mas uma multiplicidade de fatores que dificultam, quando não impedem a adoção de abordagens alternativas. Como o correto conhecimento dessa multiplicidade de obstáculos é condição *sine qua non* para sua futura superação, essa investigação se faz, sem dúvida, indispensável. Ela constitui a temática final deste convite de pesquisa endereçado aos muitos estudiosos da área.

À guisa de conclusão

Evidentemente, as quatro linhas de investigação delineadas anteriormente não devem ser contempladas de forma independente umas das outras, uma vez que o conhecimento auferido por cada uma delas pode fornecer subsídios preciosos para o desenvolvimento das demais. Assim é que uma nova compreensão das dificuldades de natureza epistemológica que incidem sobre o processo de ensino-aprendizagem da matéria de Cálculo Diferencial e Integral, quando baseado nas formulações da AS, pode melhor balizar uma nova metodologia alternativa mais exitosa. O mesmo pode ser dito a respeito de uma compreensão mais aprofundada das vantagens propiciadas por uma abordagem que, na definição dos tópicos da matéria, empregue deliberadamente a noção de infinitesimal. Contribuições feitas em cada uma das temáticas esboçadas, qualquer que seja o momento em que aconteçam, podem se retroalimentar, levando a reformulações e aprimoramentos.

Fica também patente que a terceira temática de investigação esboçada constitui o coração, por assim dizer, desse amplo projeto de pesquisa coletivo. É nela que se propõe definir em detalhes uma abordagem alternativa para o ensino-aprendizagem da disciplina de Cálculo, o que inclui o desenvolvimento de material didático de apoio abrangente e completo. É preciso reiterar que muito pouco foi feito nesse sentido até a presente data em nosso país. Temos, é certo, algumas experiências isoladas exitosas, resultantes de estudos de caso sobre o tema. Esses estudos apresentam propostas valiosas, mas em geral restritas a um ou outro tópico particular, estando longe de detalhar de forma ampla e consistente uma abordagem alternativa para o conteúdo programático integral da disciplina. Nos idos de 1994, soubemos que o grupo de pesquisa-ação em educação matemática, coordenado pelos professores Roberto R. Baldino e Tania C. B. Cabral, acalentou a proposta de produzir material didático de Cálculo infinitesimal fundamentado na ANS. No entanto, não temos conhecimento de que um material abrangente dessa natureza tenha sido publicado até o presente momento.

Para mencionar apenas uma das muitas questões e dificuldades que despontam nesse detalhamento, pensemos, por exemplo, na forma como articular a apresentação dos conceitos de integral, derivada, limite e continuidade, considerando que devem ser inicialmente apresentados de forma mais intuitiva empregando a noção de infinitesimal fundamentada em uma abordagem da ANS (como aqui defendido), para somente depois serem definidos de forma rigorosa a partir das formulações consagradas pela AS. Nesse caso, qual seria a ordem de apresentação mais adequada desse conteúdo programático? Talvez apresentar primeiro os conceitos de integral e derivada fazendo uso de elementos infinitesimais, mediante uma abordagem convenientemente escolhida da ANS, e só depois apresentar a definição formal de limite de Weirstrass, a partir da qual seriam novamente definidos derivada e integral, retomando a ordem convencional em que são expostos os tópicos da disciplina baseados na AS? Essa questão não tem resposta fácil, assim como muitas outras que surgem desde que procuramos estabelecer em detalhes uma abordagem alternativa. Para mencionar apenas mais algumas dessas questões: seria vantajoso apresentar alguns exemplos de cálculo analítico desses operadores (derivada e integral) realizados tanto segundo a AS como a partir da ANS escolhida? E o que dizer dos teoremas que compõe a matéria, como o Teorema Fundamental do Cálculo? Seria interessante demonstrá-los duplamente, tanto a partir da ANS escolhida como a partir da

AS? Há, nessas indagações, muitos aspectos que devem ser ponderados e refletidos. A tarefa é realmente desafiadora e demasiado ambiciosa para ser assumida individualmente. É o que justifica o apelo para um trabalho de pesquisa coletivo e de longo termo. Além do mais, é preciso ainda considerar que as novas metodologias desenhadas devem passar pela prova de fogo do trabalho em sala de aula, somente graças ao qual poderão mostrar-se bem-sucedidas, ou não, exigindo reformulações e aprimoramentos.

Indicações bibliográficas para trabalhos futuros

Para encerrar, dispomos nesta última secção uma bibliografia previamente selecionada para o desenvolvimento das quatro linhas temáticas de pesquisa em que se desdobra essa ampla proposta. E, por fim, fazemos votos para que esse manifesto em defesa do ensino de Cálculo infinitesimal, solidário ao convite que ele encerra, tenha o condão de reavivar o interesse por um instigante campo de pesquisa da educação matemática que tem recebido, nos últimos anos, menos atenção do que certamente merece.

Sobre as dificuldades de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

Com propostas para reformulação da metodologia de ensino

BALDINO, R. R.; MILANI, R. The theory of limits as an obstacle to infinitesimal analysis. In: **Annual Conference of International Group of Psychology of Mathematics Education**, Norwich: UEA, v. 3, n. 26, 2002, p. 345-352.

CABRAL, T. C. B. **Vicissitudes da Aprendizagem em um Curso de Cálculo**. Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro, 1992.

CAVASOTTO, M. **Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo:** o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. 146 f. Dissertação de Mestrado, PUC, Porto Alegre, 2010.

CAVASOTTO, M.; PORTANOVA, R. Reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. In: **Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação - Ciência e conhecimento na cultura da paz**, Porto Alegre: EDIPUCRS, 2008.

CORNU, B. **Aprentissage de la Notion de Limits: Conceptions et Obstacles**. Tese de Doutorado, L'Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble, 1983.

OTERO-GARCIA, S.C; BARONI, R.L.S. Questões críticas em ensino de análise matemática, **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.17, n.3, p.617-636, 2015.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica**. Tese de Doutorado, FE-USP, São Paulo, 2003.

REZENDE, W. M. **Uma análise histórico-epistêmica da operação de Limite**. Dissertação de mestrado, IEM-USU, Rio de Janeiro, 1994.

SIERPINSKA, A. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.6, n.1, p. 5-67, 1985.

SIERPINSKA, A. On some difficulties in learning limits: a case study. **Seminaire de didactique des mathematiques et de l'informatique**, Grenoble, 1983.

Em prol da abordagem não-*standard* para ensino de Cálculo

Para a defesa do ensino com infinitesimais

ALMEIDA, M. A. **Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall**. Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 2013.

ALMEIDA, M. V.; IGLIORI, S. B. C. Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo, **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p. 718-734, 2013.

ARTIGUE, M. **A revanche dos infinitesimais**. Disponível em: http://blog.kleinproject.org/?p=2669&lang=pt-br. Acesso em: 22 ago. 2022.

BALDINO, R. R. Cálculo Infinitesimal: passado ou futuro? **Temas e Debates**, Blumenau, v.8, n.6, p. 5-21, 1995.

BALDINO, R. R. **Desenvolvimento de essências de Cálculo Infinitesimal**. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

BALDINO, R. R. Infinitésimos: Quem Ri por Último? **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 36, p. 69-82, 2000.

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. Cálculo Infinitesimal para um curso de Engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006.

BINOTTO, D.; MORETTI, M. T.; PASA, B. C. Os infinitésimos: panorama histórico e possibilidades no ensino. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemátic***a*, v. 3, n. 2, p. 173-193, 2021.

CARVALHO, K.; VIDAL, F. A. *Arithmetica* Infinitorum de John Wallis: Uma análise de sua relevância para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, vol. 5, n. 14, p. 181-190, 2018.

GRATTAN-GUINESS, I. O que foi e o que deveria ser o Cálculo. **Zetetiké**, Campinas, n.5, v. 7, p. 69-94, 1997.

HARNIK, V. Infinitesimals from Leibniz to Robinson: time to bring them back to school. **The Mathematical Intelligencer**. v.8, n.63, p. 41-47, 1986.

LAUGWITZ, D.; SCHMIEDEN, C. Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. ***Math. Z***., n. 69, p. 1-39, 1958.

LIMA, E. B. **Dos Infinitésimos aos Limites: A Contribuição de Omar Catunda para a Modernização da Análise Matemática no Brasil.** Dissertação de Mestrado, UFBA, Salvador, 2006.

MILANI, R. **Concepções Infinitesimais em um Curso de Cálculo**. Dissertação de mestrado, Unesp, Rio Claro, 2002.

OLIVEIRA, T. A. de. **Análise não-standard: uma apologia ao seu ensino**. Dissertação de Mestrado, IGCE/UNESP, Rio Claro, 1993.

PASA, B. C.; BINOTTO, D.; MORETTI, M. T. Os infinitésimos: panorama histórico e possibilidades de ensino. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática**, vol. 3, n. 2, p. 173-193, 2021.

PINTO, J. M. S. **Métodos infinitesimais de análise matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

REGO, R. M. **Uma abordagem alternativa de ensino de cálculo utilizando infinitésimos**, Tese de Doutorado, UFRGN, Natal, 2000.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, 2001.

REIS, F. S. Discutindo Algumas Relações entre a História e o Ensino de Análise Matemática: da Aritmetização da Análise para a Sala de Aula do Ensino Superior. In: **Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 4, Brasília: SBEM, 2009, p. 1-11.

SULLIVAN, K. The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach. **The American Mathematical Monthly**, Washington, v.83, p. 370-375, 1976.

TALL, D. Intuitive infinitesimals in the calculus. **Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematics Education**, Berkeley, 1980, p. 170-176.

TALL, D. O. Infinitesimals constructed algebraically and interpreted geometrically. **Mathematical Education for Teaching**, v. 4, n. 1, p. 34-53, 1981.

TALL, D.; KATZ, M. G. **The tension between intuitive infinitesimals and formal mathematical analysis**. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1110.5747. Acesso em: 22 ago. 2022.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and concept definition in Mathematics with particular reference to Limits and continuity. **Educational Studies en Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1976.

VIDAL, F. A.; CARVALHO, K. *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis: Uma análise de sua relevância para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 5, n. 14, p. 181-190, 2018.

Referências bibliográficas

ALVES, P. M. S. Consciência do Tempo e Temporalidade da Consciência: Husserl Perante Meinong e Brentano. **Revista da Abordagem Gestáltica**, vol. XII, n. 2, p. 38-40, 2006.

BELL, J. L. **A primer of infinitesimal analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

BELL, J. L. **An Invitation to Smooth Infinitesimal Analysis** (1999). Disponível em: http://publish.uwo.ca/~jbell/invitation%20to%20SIA.pdf. Acesso em: 10 set. 2023.

BERKELEY, G. O analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel. **Revista Scientiæ Studia**, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 633-76, 2010.

CARVALHO, T. F. **Sobre o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa**. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

COSTA, N. C. A. da. Paraconsistent mathematics. In: **Frontiers in Paraconsistent Logic: proceedings**. London: King's College Publications, 2000, p. 165-179.

COSTA, N. C. A. da. **Sistemas formais inconsistentes**. Curitiba: Ed. UFPR, 1993.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; CARVALHO, T. F. Da Costa's Paraconsistente Differential Calculus and a Transference Theorem. **Proceedings 2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence** (II CAI-05*)*, Pune, India, Dez., 2005.

DA SILVA FILHO, J. I. An Introduction to Paraconsistent Integral Differential Calculus: With Application Examples. **Applied Mathematics**, vol. 5, n. 6, p. 949-962, 2014.

DELEDICQ, A.; DIENER, M. **Leçons de calcul infinitésimal**. Collection U. Paris: Armand Colin, 1989.

DIENER, M.; DIENER, F. (orgs.) **Non standard analysis in practice**. Heidelberg: Springer Verlag, 1995. Disponível em: https://doi.org/10.1017/CBO9780511693335. Acesso em: 10 set. 2023.

GIORDANO, P. Infinitesimals without logic. **Russian Journal of Mathematical Physics**, vol. 17, n. 2, p.159-191, 2010. Disponível em: https://arxiv.org/abs/0909.3954. Acesso em: 10 set. 2023.

HENLE, J. M.; KLEINBERG, E. M. **Infinitesimal Calculus**. Cambridge: MIT Press, 1979.

HODGSON, B. R. Le calcul infinitésimal. In: ROBITAILLE, D.F.; WHEELER D.H.; C. KIERAN, C. **Choix de conférence du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques** (ICME-7). Presses de l'Université Laval, 1994, p. 157-170. Disponível em: http://publish.uwo.ca/~jbell/invitation%20to%20SIA.pdf. Acesso em: 10 set. 2023.

KATZ, K. U.; KATZ, M. G. When is 0,999... less than 1?, **The Montana Mathematics Enthusiast**, vol. 7, n. 1, p. 3-30, 2010.

KEISLER, H. J. **Elementary Calculus: An infinitesimal approach**. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1976a. Disponível em: https://people.math.wisc.edu/~keisler/calc.html. Acesso em: 10 set. 2023.

KEISLER, H. J. **Foundations of Infinitesimal Calculus**. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1976b.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis**. Nova York: Dover Publications, 1945.

LAGRANGE, J.-L. **Théorie des Fonctions Analytiques, contenant les Principes du Calcul Différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment pétits,**

d’évanouissants, de limites et des fluxions, et réduits à l’analyse algébrique des quantités finies. Paris: Imprimerie de la Republique, 1797. Disponível em: https://books.google.com.br/books/about/Theorie_Des_Fonctions_Analytiques.html?id=sIOwoAEACAAJ&redir_esc=y. Acesso em: 10 set. 2023.

LAPLACE, P.-S. **Exposition du système du monde**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

LAUTMAN, A. **Les mathématiques, les idées et le réel physique**. Paris: J. Vrin, 2006.

LEIBNIZ, G. W. Carta de Leibniz ao matemático Dangicourt. **Theoria: Revista Eletrônica de Filosofia**, vol. 4, n. 10, p. 174-179, 2012.

LEIBNIZ, G. W. **Opera omnia**, Genebra: Ed. Ludovicus Dutens, tomo III, 1768.

MOERDIJK, I.; REYES, G.E. **Models for Smooth Infinitesimal Analysis**. Heidelberg: Springer Verlag, 1991.

NELSON, E. Internal set Theory, a new approach to NSA, **Bull. Amer. Math**. *Soc*., vol. 83, n. 6, p. 1165-1198, 1977.

NOLASCO, F. Aspectos para uma história crítica da Análise: analítica kantiana e lagrangiana. **Revista Eletrônica Estudos Hegelianos**, vol. 10, n. 18, p. 61-70, 2013.

O’DONOVAN, R. Pre-University Analysis. In VAN DEN BERG, I.; NEVES, V. (org.), **The Strength of Nonstandard Analysis**, Springer, 2007.

O'CONNOR, M. **An Introduction to Smooth Infinitesimal Analysis** (2018). Disponível no site da Cornell University: https://arxiv.org/abs/0805.3307. Acesso em: 10 set. 2023.

O'DONOVAN, R.; KIMBER, J. Nonstandard analysis at pre-university level: Naive magnitude analysis. In Cultand, N; DI NASSO, M.; ROSS, D. (org.), **Nonstandard Methods and Applications in Mathematics**, Lecture Notes in Logic, vol. 25, 2006.

PIERPONT, J. On the arithmetization of mathematics. **Bull. Amer. Math. Soc**., vol. 5, n. 8, p. 394-406, 1899.

ROBINSON, A. **Non-Standard Analysis**. Princeton: Princeton University Press, 1966.

STROYAN, K. D. **A Brief Introduction to Infinitesimal Calculus** & **Foundations of Infinitesimal Calculus.** Academic Press, 1997. Disponível em: https://web.archive.org/web/20050911104158/http://www.math.uiowa.edu/~stroyan/InfsmlCalculus/InfsmlCalc.htm. Acesso em: 10 set. 2023.

STROYAN, K. D.; LUXEMBURG, W. A. J. **Introduction to the theory of infinitesimals**. Nova York: Academic Press, 1976.

SULLIVAN, K. The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach, **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association of America, vol. 83, n. 5, p. 370-375, 1976.

TALL, D. O. **A Sensible Approach to the Calculus** (2010). Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html. Acesso em: 10 set. 2023.