

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS: Pesquisa em Educação Matemática

SISTEMAS NÃO-LINEARES: SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO MÉTODO DE NEWTON NO ENSINO MÉDIO

NON-LINEAR SYSTEMS: DIDACTIC SEQUENCE FOR NEWTON'S METHOD TEACHING IN HIGH SCHOOL

Edézio Souza da Silva Júnior ¹

Resumo

Este trabalho apresenta uma Sequência Didática para a transposição do conteúdo de Ensino Superior conhecido como o Método de Newton para sistemas de equações não-lineares. Essa transposição visa o ensino do tema para alunos do Ensino Médio, buscando adequá-lo ao nível dos discentes utilizando-se, por exemplo, de softwares para um melhor entendimento de temas como limites e derivadas. Os dados contidos nesse artigo mostram que esse ensino é possível e abre amplas oportunidades para o alcance de temas mais complexos. Mostramos aqui os passos desenvolvidos, passando pela revisão de sistemas lineares e a aquisição por parte dos alunos de conteúdos como limites, derivadas e a resolução de sistemas não-lineares com o Método de Newton, além do desempenho dos estudantes durante e após a aplicação da sequência. O estudo se deu durante a Pandemia de Covid-19 ocorrida no Brasil. Foram tomadas, durante a aplicação, medidas para a segurança de todos os envolvidos.

Palavras-Chave: Sistemas não-lineares, Sequência Didática, Método de Newton.

Abstract

This paper presents a Didactic Sequence to the transposition of the Undergraduate Education content known as the Newton's Method. This transposition aims at the teaching of the topic to High School students, seeking to adapt it to the students' level using, for example, software for a better understanding of topics such as limits and derivatives. The data contained in this article show that this teaching is possible and opens ample opportunities for reaching more complex topics. We show here the steps developed, going through the review of linear systems and the students' contents acquisition as limits, derivatives and the resolution of non-linear systems with the Newton Method, in addition to the performance of students during and after the application of the sequence. The study took place during the Covid-19 Pandemic that occurred in Brazil. Measures were taken during the application for the safety of all involved.

Keywords: Non-linear systems, Didactic Sequence, Newton's Method.

¹ Mestre em Física: Secretaria de Educação e Qualidade de Ensino, e-mail: edeziosouza2009@gmail.com.

Introdução

Objetivando um ensino de qualidade, partiremos das concepções de Libâneo (2013) de que uma sequência de incumbências pensadas pelo professor levará ao conhecimento pleno. Assim, um conhecimento de nível acadêmico será levado, observando as limitações, para alunos do Ensino Médio neste trabalho.

O conhecimento que buscamos lecionar para os discentes é conhecido como Método de Newton, uma forma básica para a resolução de sistemas não-lineares – uma vez que estes conteúdos não constam no currículo escolar, porém podem agregar conhecimento e interesse científico por parte dos alunos. A presença de conteúdos mais avançados no Ensino Básico, como descrito por Dias (2016), pode auxiliar o entendimento de conceitos mais complexos, como por exemplo em acelerações não constantes na área da Física. Buscaremos as ideias de Chevallard (2013) para adaptarmos o conteúdo para um nível compreensível aos alunos.

Para guiar nosso trabalho, captaremos os conhecimentos prévios dos alunos, a fim de desenvolver melhor nossa meta. Em nossa aplicação, analisaremos o aprendizado com questionários durante e após nossa atividade, para a avaliação do panorama de nosso ensino-aprendizagem.

Em síntese, desenvolveremos uma Sequência Didática para o ensino do Método de Newton na resolução de sistemas não-lineares, demonstrando uma básica, porém importante ferramenta para o estudo de problemas mais avançados e funcionamento de tecnologias atuais, dando aos discentes a oportunidade do contato com o conteúdo.

O Estado da Arte

Abordamos nessa sequência uma revisão de literatura que inclui uma dissertação, um artigo científico, material didático e livros científicos. A dissertação, o artigo e o material didático foram pesquisados nas plataformas: *Scientific Eletronic Library Online* e *Google Scholar*, utilizando os descritores: “Sistemas+não+lineares” e “Método+Newton+ensino”. Selecionamos estes trabalhos dentre os resultados devido a sua relevância, sendo assim, adicionados à bibliografia deste trabalho. Os livros selecionados também seguem o mesmo critério de qualidade. Dessa forma chegamos a sete livros, um artigo, uma dissertação e um material didático. Além deles, ainda fazemos uso de dois softwares.

Baseamo-nos na literatura doravante citada para compormos nossa Sequência Didática a fim de conseguirmos transpor o conhecimento do Método de Newton de um nível mais avançado de conhecimento para um ponto no qual alunos do Ensino Médio possam alcançá-lo.

Para atingirmos nosso objetivo, começaremos com as ideias de Ribeiro (2018), baseando-nos em seus planos de aula² e nos apropriando de suas concepções e experiências no ensino de limites e derivadas com a utilização dos softwares GEOGEBRA³ e wxMAXIMA⁴. Utilizaremos ainda os livros: “Cálculo com Geometria analítica” volumes 1 e 2 de Leithold (1994) e “Um Curso de Cálculo” volumes 1 e 2 de Guidorizzi (2001) para complementar nosso trabalho.

Para abordarmos uma revisão de sistemas lineares, utilizaremos o livro “Matemática” de Paiva (2015). Logo após, introduziremos os conceitos básicos de sistemas não-lineares transpondo o conteúdo do livro “Introdução aos Sistemas Dinâmicos, uma abordagem prática com MAXIMA” de Villate (2007) e mesclando a ele o material didático produzido por Cherri (2014) intitulado “Métodos Numéricos Computacionais”. Além disto, dar-se-á enfoque à pesquisa de DIAS (2016), que nos apresenta uma proposta para o ensino de conteúdos avançados para alunos do Ensino Médio, explicitando alguns exemplos para abordagem deste conteúdo em sala, buscando consolidá-lo nas mentes dos discentes.

Métodos utilizados

Devido ao conteúdo ser mais complexo, foram escolhidos alunos que estivessem terminando o Ensino Médio para a aplicação dessa sequência, uma vez que eles possuem um arcabouço matemático mais extenso, o que inclui ter estudado na segunda série do Ensino Médio o conteúdo de sistemas lineares.

A Sequência Didática foi estruturada em 13h/aula, distribuídas em 13 tempos de 50 minutos cada, sendo ministrada em horário de aula normal cedido pelo docente da turma e aplicada pelo pesquisador deste artigo. Foi aplicado um questionário diagnóstico na primeira aula e outros questionários avaliativos para medirmos o aprendizado dos

² Disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2971>. Acesso em 30 de novembro de 2020.

³ Disponível em <https://www.geogebra.org/>. Acesso em 30 de novembro de 2020.

⁴ Disponível em <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>. Acesso em 30 de novembro de 2020.

estudantes. O questionário diagnóstico revelou a situação atual dos alunos. Durante a aplicação da sequência, analisou-se o Questionário Avaliativo 1 (Apêndice 2) para observar se os alunos obtiveram o conhecimento de limites e derivadas de maneira satisfatória. Observando que pelo menos 60% dos alunos sejam capazes de resolver exercícios sobre o tema (considerando uma taxa de acertos de pelo menos 60% do questionário), iniciou-se o ensino de sistemas não-lineares e Método de Newton. Ao fim, o Questionário Avaliativo 2 trouxe o panorama de nosso objetivo, para analisar se a aprendizagem foi alcançada.

Sequência Didática

Iniciaremos essa sequência aplicando um questionário diagnóstico (disponível no Apêndice 1) para medirmos qualquer conhecimento pregresso sobre o conteúdo a ser estudado. Dessa forma, poderemos entender a situação de nossos alunos perante o conteúdo. Utilizaremos 1h/aula para a realização dessa atividade.

Em nossa segunda hora aula, trabalharemos uma revisão sobre os sistemas lineares, a fim de reavivar o conhecimento presente na mente dos alunos. Basear-nos-emos nos conteúdos trazidos na obra de Paiva (2015) para a realização dessa recapitulação. Revisaremos o conteúdo com a resolução no quadro de alguns exercícios e, logo após, os alunos tentarão resolver sozinhos em seus cadernos outras questões referentes ao assunto.

Nosso próximo passo será ensinar aos discentes os conceitos de limites, derivadas e derivadas parciais. Para isso, nos utilizaremos de 7h/aula, aplicando os conhecimentos trazidos pelos autores selecionados. Na terceira, quinta e sétima hora aula, focar-nos-emos em apresentar os conceitos nos baseando nos planos de aula⁵ de Ribeiro (2018), adicionando logo após o uso dos softwares mencionados anteriormente. Complementaremos nossa aula com as obras de Leithold (1994) e Guidorizzi (2001), principalmente na parte de derivadas parciais. Resolveremos exercícios com os alunos nas aulas de número quatro (para limites), seis (para derivadas) e oito (para derivadas parciais), aplicando o Questionário Avaliativo 1 na nona aula (disponível no Apêndice 2).

⁵ Disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2971>. Acesso em 30 de novembro de 2020.

Por fim, transporemos os conhecimentos trazidos por Villate (2007) e Cherri (2014) para ensinarmos os conceitos de sistemas não-lineares e suas resoluções pelo Método de Newton. Ainda utilizaremos os softwares GEOGEBRA⁶ e wxMAXIMA⁷ para facilitar o entendimento dos alunos. Essa etapa se dará na décima hora aula para a apresentação do conteúdo e na décima primeira para a resolução de exercícios com os alunos.

A décima segunda e décima terceira hora aula serão utilizadas para o Questionário Avaliativo 2 (disponível no Apêndice 3) sobre a utilização do Método de Newton. Em todos os questionários avaliativos, os alunos contarão com o uso de calculadoras e dos softwares citados (apenas na avaliação 2 e manipulados pelo professor).

Os questionários serão projetados por um projetor de mídia digital e os alunos resolverão as questões em seus cadernos. Uma foto será retirada pelo professor das resoluções para que não haja contato físico devido à pandemia que se alastrou no País.

Resumidamente seguiremos os passos:

Tabela I: Passos da Sequência Didática.

Aula	Descrição	Objetivo	Material utilizado
1	Questionário diagnóstico.	Medir o conhecimento prévio dos alunos.	Notebook, celular e projetor.
2	Revisão sobre sistemas lineares.	Relembrar os conteúdos estudados anteriormente.	Quadro, pincel e livro didático de Paiva (2015), vol. 2.
3	Aula sobre limites.	Aquisição de conhecimento sólido.	Quadro, pincel, notebook, projetor e materiais de Ribeiro (2018), Leithold (1994) e Guidorizzi (2001).
4	Resolução de exercícios sobre limites.	Alicerçar os conteúdos estudados.	Quadro e pincel.
5	Aula sobre derivadas.	Firmar um conhecimento sólido sobre o conteúdo.	Quadro, pincel, notebook, projetor e materiais de Ribeiro (2018), Leithold (1994) e Guidorizzi (2001).

⁶ Disponível em <https://www.geogebra.org/>. Acesso em 30 de novembro de 2020.

⁷ Disponível em <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>. Acesso em 30 de novembro de 2020.

6	Resolução de exercícios sobre derivadas.	Exercitar as habilidades adquiridas.	Quadro e pincel.
7	Aula sobre derivadas parciais.	Ampliar os conhecimentos.	Quadro, pincel, notebook, projetor, resumo da seção 4.1 e materiais de Ribeiro (2018), Leithold (1994) e Guidorizzi (2001)
8	Resolução de exercícios sobre derivadas parciais.	Relacionar o conteúdo com as questões a serem resolvidas.	Quadro e pincel.
9	Questionário Avaliativo 1.	Avaliar a absorção do conhecimento.	Notebook, celular e projetor.
10	Aula sobre sistemas não-lineares e Método de Newton.	Absorção de novo conteúdo.	Quadro, pincel, notebook, projetor e resumo dos conteúdos.
11	Resolução de exercícios sobre sistemas não-lineares.	Aperfeiçoar as habilidades adquiridas.	Quadro, pincel, notebook, projetor e resumo dos conteúdos.
12/13	Questionário Avaliativo 2.	Avaliar se o objetivo desta sequência ocorreu de maneira satisfatória.	Notebook, celular e projetor.

Fonte: Do autor, 2021.

Revisão do conteúdo.

Equações e sistemas de equações não-lineares

Uma equação polinomial é denominada de equação linear quando as variáveis apresentam potência igual a 1. Contudo, se a equação apresentar potências com expoentes maiores que 1, então teremos equações do tipo não-lineares.

Abaixo temos alguns exemplos:

Equações lineares:

$$3x - 2y = 7$$

$$-2x + 2y - z = 4$$

$$4x + 3y + 2z = 12$$

Equações não lineares:

$$x^2 + y = 2$$

$$2x^2 + y^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 + z = 6$$

Uma vez determinado esse conceito, podemos definir como sistema de equações lineares todo conjunto de equações lineares que possuam o mesmo valor das incógnitas para todas as equações. Da mesma forma, o conjunto formado por equações não-lineares (ou por equações lineares e não-lineares) é chamado de sistema de equações não-lineares.

Exemplos:

Sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

Sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Esses sistemas de equações não-lineares podem ser utilizados para a resolução de problemas mais complexos, como o sistema de motor automático de um *hoverboard*, que permite manter o equilíbrio de seu usuário. Também podem ser utilizados para a resolução de problemas com lançamentos de projéteis que levem em consideração o peso, a resistência do ar e o impulso sofrido.

Para a resolução desses problemas, normalmente utilizamos métodos de linearização desses sistemas, a fim de resolvê-los de maneira satisfatória. Um desses é chamado de Método de Newton, que é o foco desta sequência.

Derivadas parciais

Consistem em aplicar o conceito de derivadas em apenas parte da função. Podemos observar um exemplo a seguir.

Dada a função:

$$F(x, y) = x^2 + y$$

A derivada parcial em relação a x desta função é dada por:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y)}{\partial x} = 2x$$

Como derivamos apenas em função de x, y é considerado uma constante e tem em sua derivada um valor nulo.

Método de Newton

Esse método consiste em realizar uma linearização local das equações que compõem o sistema. Utilizamos a primeira equação para encontrar o valor da solução para esta aplicação; a segunda nos dará o valor aproximado que a incógnita assumirá; a terceira mostrará a margem de erro dos valores obtidos.

Equações para o Método de Newton:

$$JF(x^k)S^{k+1} = -F(x^k) \quad (1)$$

$$x^{k+1} = x^k + S^{k+1} \quad (2)$$

$$E_a = |x^{k+1} - x^k| \quad (3)$$

$$E_r = \left| \frac{x^{k+1} - x^k}{x^{k+1}} \right| \quad (4)$$

Sendo $JF(x^k)$ a matriz Jacobiana das equações iniciais.

S^{k+1} as soluções obtidas.

E_a o erro absoluto.

E_r o erro relativo.

A equação (1) deve ser repetida para os novos valores encontrados de x^{k+1} toda vez que o erro relativo não seja satisfeito. Para que possamos parar a repetição, o erro absoluto ou o erro relativo devem estar dentro da expectativa.

A seguir mostraremos a resolução de um sistema não-linear através do Método de Newton.

Seja o sistema não-linear:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

Com $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ e o erro aceitável em 0.01.

Sabendo que x_0 e y_0 são os chutes iniciais que devemos utilizar em nossa primeira linearização, vamos utilizar inicialmente a equação (1):

$$JF(x^k)S^{k+1} = -F(x^k) \quad (1)$$

Podemos reescrevê-la na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Sx_1 \\ Sy_1 \end{bmatrix} = - \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases} \quad (1.b)$$

Derivando parcialmente as funções para cada caso dentro da matriz Jacobiana temos:

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sx_1 \\ sy_1 \end{bmatrix} = - \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases} \quad (A)$$

Substituindo os valores de x_0 e y_0 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sx_1 \\ sy_1 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0.5 \\ 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx_1 + sy_1 = 0.5 \\ sx_1 - sy_1 = 0.25 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da soma temos:

$$sx_1 = 0.375$$

$$sy_1 = 0.125$$

Aplicando a equação (2) temos:

$$x_1 = x_0 + sx_1 = 0.875$$

$$y_1 = y_0 + sy_1 = 0.625$$

Os erros absolutos e relativos são encontrados aplicando-se os valores encontrados na equação (3) e na equação (4):

$$E_a = |x_1 - x_0|$$

$$E_r = \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right|$$

Logo:

$$E_{ax1} = |0.375|$$

$$E_{ay1} = |0.125|$$

$$E_{rx1} = |0.43|$$

$$E_{ry1} = |0.2|$$

Como os erros absolutos e relativos estão acima do aceitável, devemos repetir os cálculos tomando como os chutes iniciais os valores obtidos em x_1 e y_1 . Aplicando esses valores na equação (A) temos:

$$\begin{bmatrix} 1.75 & 1.25 \\ 1.75 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sx_2 \\ sy_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} -0.156 \\ -0.141 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.75sx_2 + 1.25sy_2 = -0.156 \\ 1.75sx_2 - sy_2 = -0.141 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da soma temos:

$$sx_2 = -0.084$$

$$sy_2 = -0.007$$

Aplicando a equação (2) temos:

$$x_2 = x_1 + sx_2 = 0.791$$

$$y_2 = y_1 + sy_2 = 0.618$$

Aplicando os resultados nas equações (3) e (4):

$$E_a = |x_2 - x_1|$$

$$E_r = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right|$$

Logo:

$$E_{ax2} = |-0.084|$$

$$E_{ay2} = |-0.007|$$

$$E_{rx2} = |-0.106|$$

$$E_{ry2} = |-0.011|$$

Como não alcançamos o erro aceitável, repetiremos o processo tomando x_2 e y_2 como chutes iniciais. Assim, aplicando na equação (A):

$$\begin{bmatrix} 1.582 & 1.236 \\ 1.582 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sx_3 \\ sy_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} -0.008 \\ -0.008 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.582sx_3 + 1.25sy_3 = -0.008 \\ 1.582sx_3 - sy_3 = -0.008 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da soma temos:

$$sx_3 = 0.005$$

$$sy_3 = 0$$

Aplicando a equação (2) temos:

$$x_3 = x_2 + sx_3 = 0.796$$

$$y_3 = y_2 + sy_3 = 0.618$$

Aplicando os resultados nas equações (3) e (4):

$$E_a = |x_3 - x_2|$$

$$E_r = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right|$$

Logo:

$$E_{ax2} = |0.005|$$

$$E_{ay2} = |0|$$

$$E_{rx2} = |0.006|$$

$$E_{ry2} = |0|$$

Como os erros absolutos e relativos estão menores que o aceitável, os valores para x e y que satisfazem esse sistema não-linear são 0.796 e 0.618 respectivamente.

Resultados e Discussões

Nesta seção, analisaremos os dados obtidos com a aplicação de nossa Sequência Didática. Esta pesquisa foi aplicada em cinco turmas da terceira série do Ensino Médio no ano de 2020. As turmas continham, presencialmente, nos dias em que esta sequência foi aplicada, um total de 63 alunos frequentando regularmente a instituição de ensino. Esse número reduzido se deu em razão da pandemia que assolava o estado. Os discentes estavam distribuídos da seguinte forma: 15 alunos na turma 1, 13 alunos na turma 2, 9 alunos na turma 3, 10 alunos na turma 4 e 15 alunos na turma 5.

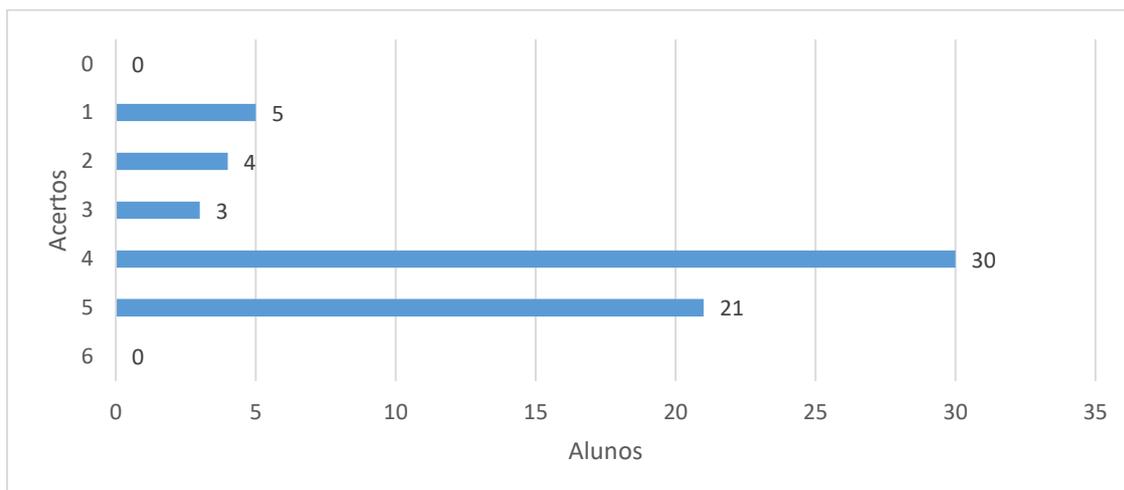
Considerando isso, de nossa fase diagnóstica (questionário disponível no Apêndice 1) obtivemos os seguintes dados:

- Todos os 63 alunos acertaram a primeira questão.
- 37 dos 63 alunos acertaram a segunda questão.
- Todos os 63 erraram as questões de 3 a 8.

Como podemos observar, dos 63 alunos, nenhum foi capaz de resolver as questões de limites, derivadas, derivadas parciais ou sistemas não-lineares (questões de 3 a 8), mostrando que os alunos não possuíam qualquer conhecimento progresso sobre os temas. Acertos puderam ser encontrados nas questões referentes a sistemas lineares (questões 1 e 2), não havendo erros na primeira questão e aproximadamente 59% dos alunos acertaram a segunda, o que faz necessária a revisão, dado que alguns alunos aparentam não dominar o conteúdo.

Após a obtenção desses resultados, a Sequência Didática foi aplicada sem contratempos (incluindo a revisão necessária a alguns alunos) até a oitava hora aula. Na nona hora aula, aplicamos o primeiro questionário avaliativo (Apêndice 2) e observamos os seguintes resultados:

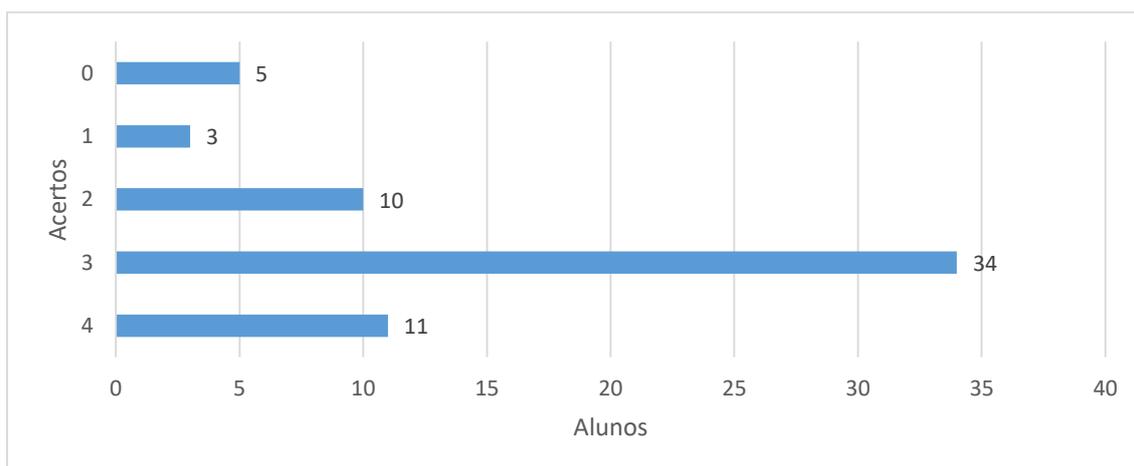
Figura I: Acertos do Questionário Avaliativo 1.



Fonte: Do Autor, 2021.

Com os resultados podemos observar que aproximadamente 81% dos alunos obtiveram uma média de acertos superior a 4, assim demonstrando que podem acertar mais de 66% das questões quando avaliados. Com esses dados, foi possível avançar para a última parte de nossa sequência, em que efetivamente ensinaremos nosso objetivo. Após as aulas 10 e 11, que se referiram aos conteúdos de sistemas não-lineares e Método de Newton, aplicamos o Questionário Avaliativo 2 (Apêndice 3) para medirmos se nosso trabalho alcançou o objetivo. Seguem os resultados:

Figura II: Acertos do Questionário Avaliativo 2.



Fonte: Do Autor, 2021.

Assim, cerca de 71% dos alunos conseguiram pelo menos 3 acertos nesta avaliação, o que representa 75% das questões. Com esses números, podemos presumir que o ensino se deu de maneira efetiva.

Conclusão

Observando os dados coletados, constatamos que uma vez que os alunos de Ensino Médio não possuem um conhecimento prévio de sistemas não-lineares, e este também não está presente no currículo do Ensino Médio, faz-se oportuna uma maneira de ensinar esse conteúdo para os discentes, uma vez que eles, munidos disso, cumprirão pré-requisitos para a aprendizagem de temas como o funcionamento de um hoverboard.

Os dados obtidos na aplicação mostram que alunos do Ensino Médio são capazes de absorver, com a ajuda de softwares e aulas regulares, o conhecimento de temas mais complexos como limites e derivadas. Uma vez feita essa constatação, uma gama de novos conteúdos, que antes apenas pertencia ao ensino superior, pode ser transposta e apresentada aos alunos.

Isso se torna notável, uma vez que a resolução dos sistemas-lineares utilizando o Método de Newton teve um resultado satisfatório, apresentando um valor de cerca de 71% dos alunos acertando em pelo menos três quartos da prova. Dessa maneira, o método utilizado nesta transposição mostra-se efetivo na docência do tema abordado.

Referências

CHERRI, A. C.; VIANNA, A. C. G.; BALBO, A. R.; BAPTISTA, E. C. **Métodos Numéricos Computacionais 2014**. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), 2014. Disponível em:

<http://www.fc.unesp.br/~adriana/Numerico/SNLinear.pdf>. Acesso em: 30 de novembro de 2020.

CHEVALLARD, Yves. Sobre a teoria da transposição didática: Algumas considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro, v. 3, ed. 2, 2013.

DIAS, Antonio Alberto de Sousa. **Cálculo diferencial e integral e geogebra: ferramentas para o ensino da física na educação básica**. 2016. 90f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2016.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo. Volume 1**, 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2001

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo. Volume 2**, 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2001.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1, 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo Com Geometria Analítica**. Volume 2, 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. 3 v.

RIBEIRO, Helena Corrêa. **Cálculo: uso de recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no Ensino Médio**. 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018. Disponível em:

<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2971>. Acesso em 30 de novembro de 2020.

VILLATE, Jaime E. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Maxima**. 3. ed. Porto: Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, 2007.

Apêndice 1: Questionário Diagnóstico

1. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

Quais os valores de x e y?

2. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 32 \\ 2x + 6y = 14 \\ 2x + 4y + z = 16 \end{cases}$$

Quais os valores de x, y e z?

3. Qual o valor de:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$$

4. Qual o valor de:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{4}}$$

5. Qual o valor da derivada da equação: $x^2 + 2$, se $x = 2$?

6. Qual a derivada da equação $x^2 + x$?

7. Resolva o sistema não-linear:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

Com $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e o erro aceitável em 0.5.

8. Resolva o sistema não-linear:

$$\begin{cases} x + y^2 + 1 = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

Com $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e o erro aceitável em 0.5.

Apêndice 2: Questionário Avaliativo 1: Limites e Derivadas.

1. Qual o valor de:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16 - x}$$

2. Qual o valor de:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{25}}$$

3. Qual a derivada da equação: $2x^5 + x$?

4. Qual a derivada da equação $x^2 + 8$?

5. Derive parcialmente $2x^5 + y$ em função de x .

6. Derive parcialmente $2x^5 + y$ em função de y .

Apêndice 3: Questionário Avaliativo 2: Sistemas Não-Lineares (Método de Newton).

1. Resolva o sistema não-linear:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Com $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e o erro aceitável em 0.1.

2. Resolva o sistema não-linear:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

Com $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ e o erro aceitável em 0.1.

3. Resolva o sistema não-linear:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases}$$

Com $(x_0, y_0) = (1, 7)$ e o erro aceitável em 0.01.

4. Resolva o sistema não-linear:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Com $(x_0, y_0) = (5, 5)$ e o erro aceitável em 0.01.