FRAÇÕES E SUAS INTERPRETAÇÕES: DISCUSSÕES E REFLEXÕES SOBRE MEDIDA

FRACTIONS AND THEIR INTERPRETATIONS: DISCUSSIONS AND REFLECTIONS ABOUT MEASUREMENT

Margaret Charnei[1]
Maria Ivete Basniak[2]

Resumo

Este trabalho teórico discute aspectos referentes às diferentes interpretações de fração, sobretudo a interpretação de fração como medida. Ao menos cinco interpretações devem ser consideradas nas discussões quanto ao ensino de frações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador. No entanto, não é oportunizada aos estudantes brasileiros o ensino de frações com os diversos significados, ficando restrita, principalmente na introdução das frações, somente ao significado parte-todo, o qual não tem sido eficaz. Contudo, pesquisas têm apontado resultados favoráveis ao ensino de frações na perspectiva da medição. Nesse contexto, são discutidas pesquisas relacionadas à perspectiva da medição baseadas na noção de partição de uma quantidade e na noção de fração na perspectiva de medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade, apresentada por Powell (2019b). Esta perspectiva coincide com a gênese histórica das frações, que emergem da necessidade de medir quantidades contínuas. A conclusão é que a introdução de frações deve ser realizada pelo significado medida, inicialmente como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades e posteriormente como ponto na reta numérica.

Palavras-Chave: Educação Matemática; Barras Cuisenaire; Perspectiva de Medição.

Abstract

This theoretical paper seeks to discuss and present aspects concerning the different interpretations of fractions, especially the interpretation of fractions as measurement. At least five interpretations should be considered when discussing the fractions teaching: measure, part-whole, quotient, ratio, and operator. However, it is not provided to Brazilian students and from many countries the instruction of fractions with the various meanings, being restricted, especially in the introduction of fractions, only to the part-whole meaning, which has not been effective. Although, research has shown favorable results in fractions teaching from the measurement perspective. In this context, we present studies related to the measurement perspective based on the partition notion of a quantity, and fraction notion in the measurement perspective, in which a fraction is a multiplicative comparison between two quantities of the same type measured by the same unit, as presented by Powell (2019b), which coincides with the fractions historical genesis, that emerges from the need to measure continuous quantities. Findings show that introduction of fractions should be performed by the meaning of measure, initially as a relation of multiplicative comparison between quantities and later as a point on the number line.

Keywords: Mathematics education; Cuisenaire rods; Measurement perspective.

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, margaret.charnei@escola.pr.gov.br

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br

Introdução

Historicamente, as frações foram construídas a partir de diferentes necessidades e significados. O ensino de frações tornou-se conceitualmente distante da sua fonte de origem, a medição. Isso ocorreu em um desenvolvimento relativamente recente na história da Matemática quando, no início do século XX, a partir do influente Matemático alemão David Hilbert, surge o Formalismo. Os formalistas defendiam que toda matemática pode ser formulada com base em regras para manipulação de fórmulas, sem qualquer referência com contextos históricos ou aos seus significados práticos. Para Silva (2005), essa visão defende que toda a Matemática pode ser construída a partir de verdades que não necessitam ser demonstradas. Essa crença filosófica permeia o Ensino de Matemática até os dias atuais e influencia a forma como os números racionais são definidos, especialmente as frações (POWELL, 2019c).

A dificuldade apresentada pelos estudantes no entendimento do conceito de fração tem sido apontada e discutida em diversos estudos (BAILEY *et al.*, 2012; TORBEYNS *et al.*, 2015; POWELL, 2018a; 2018b; 2019a; 2019c). A construção desse conceito não ocorre de forma natural devido à complexidade e diversidade de conceitos que envolve o ensino e a aprendizagem de frações. Segundo Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 3), "as frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, que se relacionam aos números racionais e outros conteúdos".

Assim, neste trabalho teórico, buscam-se esclarecer aspectos referentes às diferentes interpretações de fração, sobretudo a interpretação de fração como medida, a qual pode ser compreendida como uma relação comparativa multiplicativa entre quantidades (POWELL, 2018b) ou pontos na reta numérica (LAMON, 2012), bem como suas implicações para o ensino e para a aprendizagem deste tema da Matemática. Para isso, primeiramente realizamos uma breve discussão histórica sobre o conceito de fração relacionado com sua origem, a perspectiva da medição, fundamentada principalmente por Caraça (1951;1989), e apresentamos as diferentes interpretações sobre frações. Na sequência, apresentamos algumas pesquisas baseadas na interpretação de medida que encontramos em nossos estudos, principalmente na literatura estrangeira. Apresentamos a pesquisa realizada por Powell (2018b), cuja problemática buscou responder ao questionamento: como se ensina sobre frações a partir de uma abordagem de medição, usando barras Cuisenaire? Uma abordagem de medida que difere das outras interpretações, que são baseadas na noção de partição de uma quantidade. Finalizamos com uma discussão sobre a introdução como medida a ser utilizada para a introdução das frações.

O Conceito de Fração e sua Construção Histórica

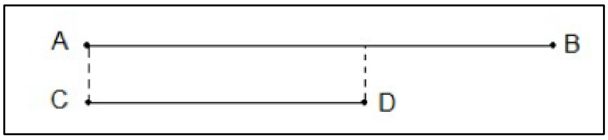
Na definição formalista, os números racionais são representados como frações comuns, sendo símbolos bipartidos que expressam quocientes ou razões entre dois números inteiros a e b, $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$. Na expressão $\frac{a}{b}$, a é chamado dividendo ou numerador; e b, de divisor ou denominador. Segundo Powell (2019c, p. 701), fundamentado em Davydov e Tsvestkovich (1991) e Schmittau (2003), essa definição faria pouco sentido para os estudantes; então, mesmo contradizendo o projeto formalista, os educadores matemáticos inventaram correlações visuais para frações que envolvem particionar itens do cotidiano, como pizzas, barras de chocolate e castanhas, ou figuras geométricas divididas em partes iguais, em que algumas dessas partes estão sombreadas. Desta forma, para as crianças, as representações visuais dariam sentido ao símbolo bipartido $\frac{a}{b}$.

O povo egípcio, além da escrita dos números, também é conhecido por ter desenvolvido o conceito de fração, quando os Números Naturais não eram mais capazes de representar de todas as medições realizadas. Ao fracionar a unidade, ou seja, ao constituir o conceito de fração, ocorreu o que seria a expansão do campo dos números naturais ao campo dos números racionais. Aleksandrov (1963, p. 24-25, tradução nossa) localiza a origem das frações na interação inicial entre geometria e aritmética:

> Em geral, a medição de qualquer magnitude combina cálculos com alguma operação específica que é característica desse tipo de magnitude... Mas no processo de medição verifica-se, em geral, que a unidade escolhida não está contida na magnitude medida um número inteiro de vezes, de modo que um cálculo simples do número de unidades não é suficiente. Torna-se necessário dividir a unidade de medida para expressar a magnitude com mais precisão por partes da unidade; isto é, não mais por números inteiros, mas por frações. Foi desse modo que as frações realmente surgiram, como é demonstrado por uma análise do histórico e de outros dados. Surgiram da divisão e comparação de magnitudes contínuas; em outras palavras, da medição.

Corroborando com a ideia de que as frações surgiram da medição, Caraça (1989) as exemplifica, utilizando dois segmentos de reta (Figura1), um nomeado AB e outro CD. Ao sobrepor um segmento a outro fazendo coincidir dois extremos, no caso A e C, verifica-se que o ponto D se localiza entre A e B. Logo, a comparação entre esses dois segmentos pode ser feita afirmando que o comprimento de AB é maior que CD; ou que o comprimento CD é menor que o AB (POWELL, 2018b).

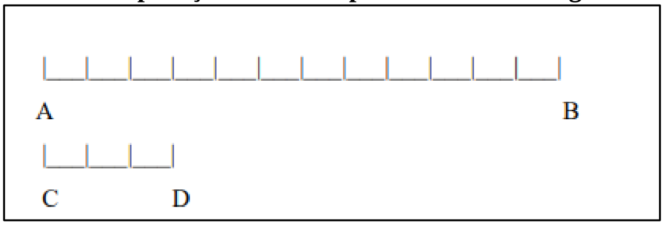
Figura 1 – Medição de segmentos



Fonte: Caraça (1989, p. 29).

Segundo Caraça (1989), comparar o resultado dos comprimentos com maior *ou menor que*, não responde a muitas questões, sendo necessário responder à pergunta *quantas vezes um comprimento cabe no outro.* É necessário, também, estabelecer um padrão de comparação para as grandezas da mesma espécie, como se faz com metro para comprimento e grama para peso, por exemplo. Para responder à pergunta *quantas vezes*, é necessário um número que exprima o resultado da comparação com a unidade. “Este número chama-se a *medida* da grandeza em relação a essa *unidade*” (CARAÇA, p. 30, 1951, grifo do autor). Tomando a Figura 2, o resultado da comparação expressa que o segmento CD cabe quatro vezes em AB; ou ainda, que a medida CD, considerando AB como unidade de medida, é quatro.

Figura 1 – Comparação entre comprimento de dois segmentos 1

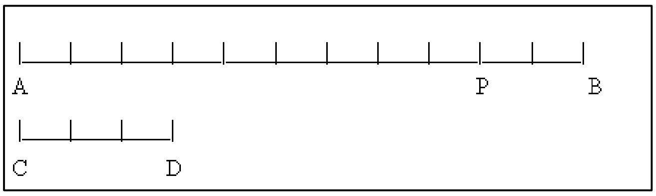


Fonte: Caraça (1989, p. 33).

$$\frac{AB}{CD} = \frac{12}{3} = 4$$

Para Caraça (1989, p. 33), a situação representada na figura 2 é uma exceção. O que ocorre com maior frequência é o caso em que, aplicando a unidade sobre AB, *sobra* uma porção PB de segmento inferior à unidade, como na Figura 3.

Figura 2 - Comparação entre comprimento de dois segmentos 2



Fonte: Caraça (1989, p. 12).

Utilizando o mesmo raciocínio anterior, teríamos $\frac{AB}{CD} = \frac{11}{3}$. Porém, esta razão não existe em números inteiros, porque 11 não é divisível por 3, sendo necessário um novo campo numérico que contemple essa medição. A técnica utilizada para realizar a medição da figura 3 partiria do pressuposto que é possível exprimir, sempre, a medida de um segmento tomando outro como unidade. Desta forma, PB são duas partes das três partes representadas por CD (unidade), e então escrevemos a razão $\frac{PB}{CD} = \frac{2}{3}$ (duas partes das três em que está dividida a unidade). Segundo Caraça (1989), teoricamente, em qualquer das hipóteses anteriores, a razão $\frac{AB}{CD}$ é considerada um Número Racional. No entanto, se AB não for divisível por CD, $\frac{AB}{CD}$ é um Número Racional Fracionário. É possível interpretar, então, que em $\frac{11}{3}$ cabem 3 unidades CD inteiras e a parte fracionária $\frac{2}{3}$ (dois terços) da unidade CD, ou que $\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$. Desta maneira, podemos afirmar que, no problema da medida, temos: escolha da unidade; comparação com a unidade; e a expressão do resultado dessa comparação por meio de um número.

Powell (2018b, p. 404, tradução nossa), no entanto, aponta que "poucas pesquisas sustentadas têm investigado a base ontológica alternativa conhecida para o conhecimento das frações, a perspectiva da medição". A escassez nas pesquisas também se reflete nos documentos norteadores do currículo da Educação Básica, como descrevem Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 2), citando que a medição, como possibilidade para a construção do campo numérico dos números racionais, não se encontra nos objetivos de aprendizagem ou conteúdos de maneira evidente no Referencial Curricular do Paraná (PARANÁ, 2018) e no Currículo da Rede Estadual Paranaense - CREP (PARANÁ, 2019), "apesar de a BNCC destacar a importância de propiciar aos alunos tarefas que envolvam medições, para mostrar a necessidade de um novo campo numérico".

Entretanto, a interpretação da fração com medida não é única, as frações assumem diferentes interpretações. Nesse sentido, ao menos cinco interpretações devem ser

DOI 10.36661/2596-318X.2022v4n2.13178

consideradas nas discussões quanto ao ensino de frações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador, como discutimos na seção que segue.

Fração e suas Interpretações

Behr *et al.* (1992) relatam que frações e números racionais, quando associados a problemas do mundo real e observados de um ponto de vista pedagógico, assumem inúmeras *personalidades* ou significados, os quais vêm sendo estudados desde a década de 70, compondo uma vasta literatura que discute a ideia de que os números racionais são constituídos por várias interpretações ou significados (KIEREN, 1976; 1980; BEHR *et al.*, 1983; LAMON, 2012). Porém, ainda existem divergências nas tentativas de definir as características dos números racionais e das frações.

Um dos pesquisadores no tema, mais lido e referenciado em trabalhos que abordam frações e Números Racionais, é Kieren (1976; 1980; 1988; 1993). Este pesquisador foi o primeiro a chamar a atenção para a existência de diversas interpretações ou significados para os Números Racionais. Ele afirma que, para uma completa compreensão dos Números Racionais, é necessário conhecer cada uma dessas interpretações distintas e a forma como elas se inter-relacionam. Ressalta que, "para aprender adequadamente os aspectos algébricos que são inerentes aos conceitos dos números racionais é necessária uma variedade de experiências com diversas interpretações de números racionais" (KIEREN, 1976, p.109, tradução nossa). Em sua primeira publicação, o autor listou sete interpretações:

> 1. Números racionais são frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc.
> 2. Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (pelo nosso sistema numérico) para os números inteiros.
> 3. Os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots)$ e $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\}$ são números racionais.
> 4. Números racionais são números na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros, e $q \neq 0$. Nessa forma, os números racionais são números de "proporção".
> 5. Números racionais são operadores multiplicativos.
> 6. Números racionais são elementos de um campo quociente ordenado infinito. Eles são números da forma: $x = \frac{p}{q}$, onde *x* satisfaz a equação $qx = p$.
> 7. Os números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica (KIEREN, 1976, p. 109-110, tradução nossa).

DOI 10.36661/2596-318X.2022v4n2.13178

Em trabalho posterior, Kieren (1980) reorganizou essas sete em cinco interpretações das frações: parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Portanto, inicialmente, Kieren (1976) considerava frações como uma das interpretações para os Números Racionais, mas posteriormente (KIEREN, 1980) substituiu este termo pela interpretação parte-todo. Em um trabalho realizado em 1988, o pesquisador reorganizou novamente essas interpretações em quatro categorias: quocientes, operadores, medidas e razões, entendendo que o conceito de parte-todo está posto nas outras interpretações (KIEREN, 1988).

Referenciando-se nos trabalhos de Kieren (1976; 1980; 1988; 1993) surgiram outras pesquisas que se destacaram na tentativa de esclarecer as diferentes interpretações de frações. Behr *et al.* (1983), a partir das interpretações propostas por Kieren (1976), reorganizaram as categorias incluindo novamente parte-todo, denominada por eles como *corpo quociente*. Dessa maneira, Behr *et al.* (1983) propuseram os seguintes significados para os Números Racionais: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado, corpo quociente, e operador, os quais, posteriormente, Behr *et al.* (1992) organizaram em sete interpretações:

1) medida fracionária que indica a questão de quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade. Eles propuseram esta interpretação como uma reformulação da noção parte/todo;

2) razão, não sendo esclarecida pelos autores a ideia pertencente a essa interpretação;

3) taxa, que define uma nova quantidade como relação entre duas outras quantidades. O que distingue taxas de razões é que as taxas podem ser adicionadas e subtraídas, enquanto as razões, não;

4) quociente, que vê o número racional como resultado de uma divisão;

5) coordenadas lineares, que interpretam o número racional como um ponto da reta numerada, ou seja, os números racionais formam um subconjunto dos números reais;

6) decimal, que enfatiza as propriedades associadas ao nosso sistema de numeração; e

7) operador, que vê a fração como uma transformação.

A partir desses e outros autores (KIEREN, 1976; 1989; BEHR *et al.*, 1983; ESCOLANO; GAIRIN, 2005; LAMON, 2012), Doneda de Oliveira e Basniak (2021) elaboraram um quadro que destaca e exemplifica as interpretações de frações frequentemente utilizadas.

Quadro 1 – Ideias e Significados Relacionados às Interpretações de Frações

Interpretação	**Ideias e Significados Relacionados**
Parte-todo	Ideia de parte de um todo. Sendo $\frac{a}{b}$ em que a é a parte considerada e b é o todo. É necessário compreender que a é parte de um mesmo todo. **Exemplo**: um retângulo é dividido em 5 partes iguais e tomam-se 3 partes, temos a fração $\frac{3}{5}$.
Quociente	Ideia de partição e quotização. Na partição, o todo tem que ser repartido em partes iguais para um grupo definido. **Exemplo:** repartir 12 brigadeiros para 6 crianças. Quantos brigadeiros cada criança irá receber? Na quotização, o total de elementos já está definido, e o que precisamos encontrar é o número de grupos que podem ser feitos com o todo. **Exemplo**: temos 12 brigadeiros e queremos distribuir 3 brigadeiros para cada criança. Quantas crianças irão receber brigadeiros?
Razão	Ideia de razão ou taxa. A razão é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza. **Exemplo**: em uma sala de aula de 20 meninas e 10 meninos, podemos afirmar que a razão do número de meninas para o número de meninos é $\frac{2}{1}$ ou 2:1. A taxa é uma extensão do construto de razão e é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de grandezas diferentes, em que a segunda grandeza depende da primeira. **Exemplo**: a velocidade que normalmente é expressa em quilômetro por hora ou metro por segundo.
Operador	Ideia de *encolher* ou *esticar,* ou ainda, *ampliar* ou *reduzir*. Está associado à ideia de função $f(x) = \frac{a}{b}x$, com $b \neq 0$. Ao ser aplicada em grandezas contínuas, tem-se a noção de *encolher* ou *esticar,* ou ainda, *ampliar* ou *reduzir*, e o todo é transformado. **Exemplo**: Ao calcular $\frac{2}{5}$ do número 30, aplicamos uma redução do número 30. Se calcularmos $\frac{5}{2}$ do número 30, o efeito é de ampliação.
Medida	Ideia de medir como ação. Medir exige comparação e ordenação. Para expressar essa magnitude, é necessária a representação fracionária, caso a medida não seja inteira; e a escolha de uma unidade de medida. **Exemplo**: Medir o comprimento de uma folha de papel e expressar essa medida com representação fracionária, utilizando um lápis como unidade de medida.

DOI 10.36661/2596-318X.2022v4n2.13178

Fonte: Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 16).

É importante destacar que, para todos os autores citados, as cinco interpretações (parte-todo, quociente, razão, operador e medida) são baseadas na noção de partição de uma quantidade. Entretanto, Powell (2019b) apresenta a noção de fração na perspectiva de medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade. O quadro 2 exemplifica todas as interpretações consideradas.

Quadro 1 - Interpretações para a fração $\frac{1}{4}$

Interpretações	Exemplos para a fração $\frac{1}{4}$
Parte-todo (parte-parte)	1 de 4 partes iguais; 1 menina para cada 4 meninos.
Quociente	1 dividido por 4.
Razão	1 de algo comparado a 4 de algo mais, em um sentido multiplicativo.
Operador	$\frac{1}{4}$ de algo que é a unidade, de uma quantidade.
Medida	O comprimento de $\frac{1}{4}$ de uma unidade em uma linha numérica, que pode ser iterada *n* vezes para obter a fração $\frac{n}{4}$.
Medição	A medida de uma quantidade é $\frac{1}{4}$ da medida de outra.

Fonte: Souza e Powell (2021, p. 85, tradução nossa).

Considerando a complexidade que envolve as diferentes interpretações sobre frações, Berh *et al.* (1983) problematizaram a dificuldade sobre qual ou quais das interpretações seriam indicadas para desenvolver, nas crianças, o conceito básico de fração, assim como as relações, operações e aplicações com números racionais. Nesse contexto, discutimos, na sequência, algumas pesquisas com resultados favoráveis no ensino de frações na perspectiva da medição.

O que dizem as pesquisas relacionadas à perspectiva de medição

Encontramos, em nossos estudos, principalmente na literatura estrangeira, pesquisas que discutem e apresentam a instrução de frações baseadas na perspectiva da medição como abordagem eficaz no ensino de frações. As pesquisas apresentadas nesta seção são assentes na partição de uma quantidade, sendo apresentada posteriormente a pesquisa desenvolvida por Powell (2018b), em que a medida é compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade.

Campos e Rodrigues (2007) desenvolveram uma pesquisa com estudantes do Ensino Fundamental, Médio e Superior para identificar as dificuldades referentes à definição do referencial em situações que envolvem frações. A partir dos resultados, os autores sugerem que as dificuldades observadas poderiam ser amenizadas se o ensino de frações contemplasse o significado de medida. Porém, como comentam os autores citando Silva (2005), o significado de medida é um dos menos considerados pelos professores na elaboração de suas atividades.

Em pesquisa mais abrangente, Torbeyns *et al.* (2015) realizaram um estudo investigando as relações entre a compreensão da magnitude da fração, a aritmética e as habilidades matemáticas com estudantes de 6º e 8º Ano na China, Bélgica e nos Estados Unidos da América (EUA), países que possuem práticas educacionais diferentes. Inicialmente, os pesquisadores são enfáticos em afirmar que, tanto para números inteiros quanto para frações, os estudantes precisam aprender a interpretar os símbolos numéricos em termos das magnitudes às quais eles se referem, e que essa compreensão de magnitude é central para a competência matemática geral.

Os autores citados ressaltam que o ensino de fração nos EUA é quase exclusivamente baseado na interpretação parte-todo, enquanto os alunos na China e na Bélgica encontram ênfase substancial na interpretação da medição (TORBEYNS *et al.*, 2015). O estudo concluiu que os estudantes chineses, instruídos em fração enfatizando a interpretação de reta numérica, tiveram melhor desempenho na compreensão de magnitude e nas tarefas aritméticas com frações do que estudantes dos EUA. Os estudantes belgas cometeram menos erros que os estudantes dos EUA nas tarefas de fração. O estudo sugeriu, também, que há evidências da influência do conhecimento matemático dos professores na aprendizagem de frações, e comentam que os professores chineses possuem um *rico* conhecimento matemático; enquanto nos EUA, os professores possuem um conhecimento mais *superficial;* e os docentes da Bélgica parecem situar-se entre os professores da China e dos EUA.

Corroborando com esses resultados, Escolano e Gairin (2005), em pesquisa realizada na Espanha, avaliando uma proposta didática diferenciada para o ensino de

DOI 10.36661/2596-318X.2022v4n2.13178

frações, desenvolvida ao longo dos últimos três anos do ensino Fundamental, do 4º ao 6º Ano (10 a 12 anos), verificaram superação significativa dos estudantes das limitações geradas pela abordagem parte-todo, amplamente adotado na Espanha. Nesse estudo, inicialmente foi utilizada a perspectiva de medição no 4º Ano, o modelo de quociente no 5º Ano, e o modelo de razão entre grandezas de magnitude no 6º Ano.

Estudo conduzido por Fuchs *et al.* (2013), envolvendo 259 alunos da 4ª série, em Nashville, estado de Tennessee, Estados Unidos, com média de 10 anos de idade, recebendo diferentes intervenções sobre a compreensão de frações e aritmética, demonstrou que a intervenção baseada na medição foi mais eficaz do que uma abordagem instrucional predominante, que enfatizava interpretações de frações parte-todo.

As pesquisas brasileiras, de acordo com o estudo realizado por Scheffer e Powell (2020), indicam a predominância da abordagem do particionamento (parte-todo). Os pesquisadores realizaram um estudo analisando dissertações, teses e artigos brasileiros publicados de 2013 a 2019. Dos estudos selecionados, predominam os que tratam da utilização de materiais manipuláveis e de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de frações, além de pesquisas que tratam da noção e definição de frações a partir de medição, comparação, propriedades e operações. Com relação ao significado, atendem principalmente à interpretação parte-todo e dos operadores de frações. O aporte teórico "fundamenta-se em autores que se referem à construção do conceito e da noção de fração, principalmente aqueles que estabelecem relação com a interpretação parte-todo" (SCHEFFER; POWELL, 2020, p. 18). Ressaltamos que as publicações que envolvem a abordagem de frações na perspectiva de medição não foram citadas por autores brasileiros.

No entanto, Graça, Ponte e Guerreiro (2021), embasados no estudo de Charalambous e Pitta-Pantazi (2007), afirmam que o significado medida é um dos que os alunos apresentam mais dificuldade, e que isto se deve, em parte, à pouca abordagem na instrução de números racionais.

Assim discutimos, na seção que segue, duas perspectivas diferentes para o ensino de frações baseado na interpretação de medida, indicados por Powell (2018b) e Lamon (2012) para introduzir as frações.

Medida: Reta Numérica X uma Relação de Comparação Multiplicativa entre Quantidades

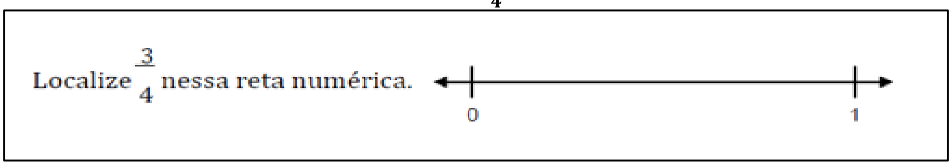
Nesta seção discutimos a interpretação das frações como medida sob duas perspectivas diferentes: pontos na reta numérica (partição) e uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, a partir dos estudos de Lamon (2012) e Powell (2019c).

Lamon (2012, p. 213, tradução nossa) reporta a pontos na reta numérica para a interpretação de medida, escrevendo que “é improvável que qualquer outra interpretação de fração possa chegar perto do poder da reta numérica para construir o sentido de número”. Para a autora, a possibilidade de indicar uma fração na reta numérica, podendo ter infinitas possibilidades, ajuda a desenvolver, nos estudantes, a noção de densidade dos números racionais, o senso de ordem e de magnitudes relativas de números racionais. Estes atributos são resumidamente denominados pela autora como *senso de fração.*

A partição exerce um papel importante em outros modelos e interpretações, mas para Lamon (2012), quando tratamos de frações como medidas, o ponto central está na possibilidade de particionar a unidade sucessivamente, e o número de partes iguais pode variar, dependendo de quantas vezes for necessário realizar esse processo. Esse aspecto dinâmico da medição é diferente de quando se compara o número de partes iguais que se tem com um número fixo em uma unidade, como na interpretação parte-todo, por exemplo.

A autora reforça que é muito fácil construir problemas que exigem partições sucessivas. No entanto, chama a atenção para os problemas propostos aos estudantes, para que eles cumpram o objetivo. Na Figura 4, podemos observar que, embora seja nomeado como um problema de medição, é basicamente solicitado para sombrear $\frac{3}{4}$ de uma figura, pois sugere dividir a unidade em 4 intervalos iguais e marcar o terceiro intervalo, desta maneira, sendo associado à perspectiva parte-todo.

Figura 3 -Localizando $\frac{3}{4}$ na reta numérica

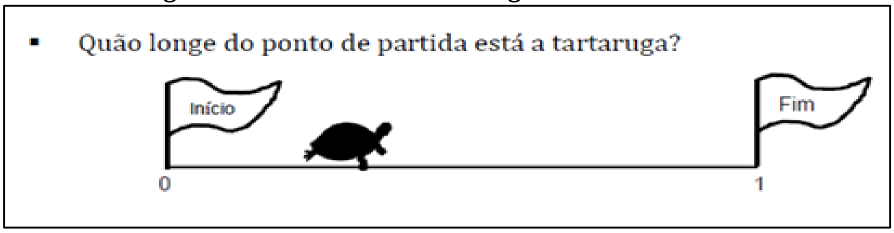


Fonte: Lamon (2012, p. 210, tradução nossa).

DOI 10.36661/2596-318X.2022v4n2.13178

Na Figura 5, pede-se para determinar a fração apropriada para a posição da tartaruga. Essa tarefa irá exigir partições sucessivas até chegar ao ponto em que a tartaruga está, e assim nomear a fração.

Figura 5 - Localizando a tartaruga na reta numérica



Fonte: Lamon (2012, p 21, tradução nossa).

Para Lamon (2012), o objetivo de tarefas como esta é, em parte, que os estudantes tenham noção de como os números fracionários se relacionam uns com os outros, e para saberem onde estão localizados em relação à $\frac{1}{2}$ e à unidade, no caso da Figura 5. O $\frac{1}{2}$ seria a *âncora*, termo utilizado por pesquisadores que investigam o senso numérico (CORSO; DORNELES, 2010; RESNIK, 1989; YANG, 2003), e pode ser entendida como uma base para o raciocínio durante o processo de resolução de problemas matemáticos.

Powell (2018a; 2019c) adota outra perspectiva para trabalhar com as frações. Para esse autor a interpretação de medida é compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades. Para Powell (2019c), o termo fração permite duas abordagens: a de medição e a de particionamento.

Na abordagem de partição, o autor cita as seguintes características cognitivas:

1. Um todo ou quantidade equiparticionada, discretizada;
2. Um todo é uma unidade implícita e *preordenada*;
3. Induz à contagem;
4. Fração unitária predeterminada; e
5. Uma fração denota contagens de entidades discretas: número de partes destacadas em relação ao número total de partes.

No entanto, para a abordagem da medição são citadas as seguintes características:

1. Duas quantidades contínuas distintas;
2. Uma quantidade é uma unidade explícita;
3. Necessita estimar ou medir; e
4. Fração unitária a ser determinada;

O autor realiza pesquisas na perspectiva da medição utilizando a ferramenta pedagógica barras Cuisenaire. De acordo com Powell, ao utilizar as barras Cuisenaire é possível avançar de frações não-simbólicas para simbólicas, motivo pelo qual apresentamos, na sequência, a abordagem para o ensino de frações na perspectiva da medição desse o autor.

Introdução ao Ensino de Frações com as Barras Cuisenaire

Powell (2018a; 2018b; 2019c) discute a possibilidade do ensino de frações por meio da perspectiva da medição, utilizando as barras Cuisenaire. Ele defende que a introdução ao ensino de frações deve ser realizada com a interpretação das frações como medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades. A utilização das barras Cuisenaire para a instrução de frações vai ao encontro da argumentação de Caraça (1989) para a solução do problema citado na Figura 1, possibilitando ao estudante escolher a unidade, comparar com a unidade e expressar o resultado dessa comparação por meio de um número.

Powell realizou pesquisa baseada na perspectiva da medição utilizando o material Cuisenaire e um modelo instrucional denominado: Modelo 4A-Instrucional. Esse Modelo consiste em quatro fases de implementação de uma abordagem pedagógica, a subordinação do ensino da matemática ao aprendizado dos alunos utilizando barras Cuisenaire (POWELL, 2018b). Nesta abordagem, segundo o autor, uma unidade instrucional é muitas vezes mais longa do que uma única reunião de classe. A sequência consiste em uma sucessão coerente e flexível de tarefas destinadas a capacitar os alunos a educar sua consciência sobre as ideias de um tópico matemático.

A pesquisa foi realizada com alunos do 2º Ano do Ensino Fundamental (8-9 anos), sem instrução prévia em frações, em uma escola urbana de desempenho baixo, em uma comunidade economicamente deprimida, em New Jersey, nos EUA. Segundo o autor, ao término das sessões, os alunos:

> [...] foram capazes de adquirir, apropriar e articular a linguagem matemática para descrever e registrar com notações matemáticas as proporções percebidas entre dois comprimentos de barras de Cuisenaire e responder de forma flexível e correta em situações não ensaiadas de comparação multiplicativa de duas barras sem a presença física das barras de Cuisenaire. Sabendo como as magnitudes das hastes se comparam. Para criar estas

afirmações matemáticas, os alunos evocavam e manipulavam suas imagens mentais das barras de Cuisenaire (POWELL, 2019b, p. 12).

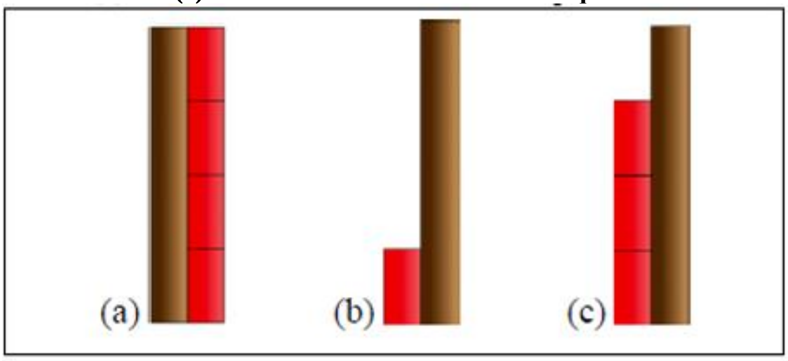
Desta forma, Powell (2019a) defende que o ensino de frações deva iniciar pela perspectiva da medição, pois relaciona as frações com suas origens históricas, e desta maneira restabelece suas raízes ontológicas; supera as dificuldades conceituais apresentadas pela concepção dominante parte-todo; ajuda a conceber um quociente de dois números naturais como uma magnitude holística e se conecta naturalmente com atividades elementares precoces em torno de medições não padronizadas e padronizadas.

Powell (2019c) discute que a origem das frações não é filosófica, e sim cultural. Está baseada no entendimento da prática social humana de comparar ou medir quantidades contínuas há mais de quatro milênios.

> Mais especificamente, surgiram frações à medida que os indivíduos queriam saber, por exemplo, a extensão de uma distância d, em comparação com uma unidade de medida u. Existem dois casos. Ou d é igual a um múltiplo exato de u., ou não, o que ocasiona a necessidade de números fracionários (POWELL, 2019c, p. 703).

Para ilustrar o primeiro caso utilizando as barras Cuisenaire, Powell (2019c) usa como exemplo a barra vermelha e a marrom. Ao utilizar a barra vermelha como unidade de medida é possível afirmar, lendo da esquerda para a direita, que o comprimento de uma barra marrom é igual ao comprimento de quatro barras vermelhas. Segundo Powell (2019c, p. 705), "esta afirmação revela uma relação comparativa entre as duas quantidades, barras marrons e vermelhas. A relação é multiplicativa, pois quatro barras vermelhas são iguais a uma barra marrom".

Figura 6 - (a) A barra marrom é igual a quatro barras vermelhas. (b) A barra vermelha é um quarto da barra marrom. (c) Três barras vermelhas são três-quartos da barra marrom



Fonte: Powell (2019c, p.705).

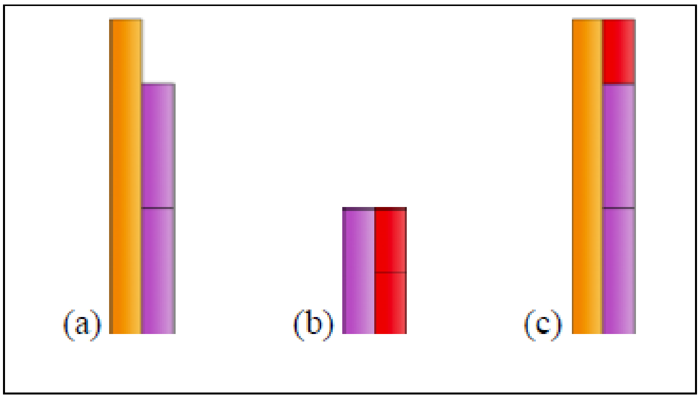
DOI 10.36661/2596-318X.2022v4n2.13178

No entanto, ao utilizar o comprimento da barra marrom como unidade de medida, lendo da esquerda para a direita, o comprimento de uma barra vermelha é um quarto do comprimento de uma barra marrom (Figura 6 (b)); ou ainda, o comprimento de três barras vermelhas é três quartos do comprimento de uma barra marrom (Figura6 (c)). Continuando com o padrão, poderíamos afirmar que o comprimento de seis barras vermelhas é seis quartos do comprimento de uma barra marrom, chegando, desta maneira, de uma forma *natural* às tão *incompreendidas* frações impróprias.

Powell explica que cada barra Cuisenaire pode ser expressa por uma letra, por exemplo, vermelho *v* e marrom *m*, podendo, assim, as declarações verbais serem representadas simbolicamente, usando notação matemática. Ao afirmar que o comprimento de uma barra marrom é igual ao comprimento de quatro barras vermelhas, pode-se escrever $m = 4v$, ou ao informar que a barra vermelha medida por barras marrons é igual a um quarto, podemos escrever $\frac{v}{m} = \frac{1}{4}$. Importante observar que, ao representar simbolicamente essas relações, introduz-se a Álgebra às crianças.

Em relação ao segundo caso citado por Powell (2019c), que desencadeou a invenção das frações, o autor utiliza, para exemplificar, o comprimento da barra roxa como unidade de medida para medir o comprimento da barra laranja. No entanto, como pode ser observado na Figura 7 (a), uma barra laranja não mede exatamente um número inteiro do comprimento das barras roxas. Surge a necessidade da utilização de uma subunidade de medida, aqui sendo a barra vermelha, pois uma barra roxa é igual a duas vermelhas e, desta forma, é possível medir a barra laranja (Figura 7 (c)). A "notação matemática é: $l = 2 \times r + \frac{1}{2} \times r$, $l = 2 \times r + \frac{1}{2} \times r$ ou, já que cada barra roxa é igual a duas barras vermelhas, esta: $l = \frac{5}{2} \times r$" (POWELL, 2019c, p. 707).

Figura 7 – Medir o comprimento da barra laranja tendo a barra roxa como a unidade de medida



Fonte: Powell (2019c, p. 707).

Qualquer barra pode ser utilizada como unidade de medida para determinar a porção do comprimento da outra. De forma geral, Powell (2019c, p. 708) escreve:

> Se d não for igual a um múltiplo exato de u , poderá existir uma subunidade da medida v, de modo que d seja igual a exatamente m subunidades de v, isto é, $d = m \times v$; e u é igual a exatamente n subunidades de v, ou seja, $u = n \times v$, o que implica que $v = \frac{1}{n} \times u$. Como $d = m \times v$, então $d = m \times \frac{1}{n} \times u$; isto é, $d = \frac{m}{n} \times u$. Assim, a distância d é igual à razão m enésimos (ou m um-enésimo) da unidade de medida u, onde $\frac{m}{n}$ é uma fração. Essa expressão— $d = \frac{m}{n} \times u$— representa uma comparação multiplicativa entre as duas quantidades mensuráveis d e u.

O autor (2018b) cita quatro vantagens da epistemologia proposta no conhecimento de fração por meio da perspectiva de medição:

1) Relacionar frações com suas origens históricas e, como tal, restaurar suas raízes ontológicas;

2) Superar as dificuldades conceituais documentadas da concepção de frações tradicional dominante parte/todo, como o ato de medir desafia a sequência instrucional atual que coloca números mistos no final do aprendizado de fração e faz com que as frações tenham consequências próprias de comparações multiplicativas entre pares de quantidades;

3) Ajudar a conceber um quociente de dois números naturais como uma magnitude holística; e

4) Mitigar a chamada base do número inteiro ou natural.

Os resultados da pesquisa realizada por Powell (2018b) evidenciam que o ensino de frações pode ser iniciado pela perspectiva da medição. No entanto, são necessários estudos empíricos que esclareçam qual o potencial do material Cuisenaire na

DOI 10.36661/2596-318X.2022v4n2.13178

aprendizagem de frações na perspectiva de medição para alunos que já tiveram, previamente, instrução formal de frações em outra perspectiva.

Afinal, qual é a interpretação indicada para a introdução do conceito de fração?

Após constatar a discrepância nos resultados do desempenho matemático do Programa de Avaliação Internacional de Estudantes (PISA) nas últimas três edições (2012, 2015 e 2018), dos estudantes brasileiros, estadunidenses e japoneses, em que os brasileiros ocuparam o último lugar, os americanos uma posição intermediária e os japoneses alcançaram o primeiro lugar, Souza e Powell (2021) investigaram as razões desses resultados realizando uma análise das séries do livro didático de matemática mais utilizado em cada um dos respectivos países nas séries em que são abordadas as frações. Em relação às interpretações de frações, os autores afirmam que, no Brasil e nos Estados Unidos, concentra-se a interpretação parte-todo, e a abordagem é procedimental, enquanto nos livros didáticos japoneses predomina a interpretação da medida como uma iteração de frações unitárias e parte-todo, e a abordagem é conceitual. Os autores concluem que "a abordagem de frações dos livros japoneses parece estar mais próxima do que recomenda a comunidade científica de Educação Matemática e este pode ser um importante diferencial que explique parte dos resultados no PISA" (SOUZA; POWELL, 2021, p. 78).

Como já citado anteriormente, Kieren (1976) ressaltou a importância de os estudantes terem a possibilidade de ser instruídos nas diferentes interpretações de frações, pois dessa maneira seriam capazes de compreender os aspectos algébricos que são intrínsecos aos conceitos de números racionais, ao grupo dos quais as frações pertencem. Já Lamon (2012, p. 14) é enfática ao afirmar que todas as interpretações "estão em pé de igualdade", referindo-se a, geralmente, o significado comparação de parte-todo ser o único utilizado na instrução de frações, e que essa restrição acaba trazendo sérios prejuízos aos estudantes.

Em pesquisa recente, Graça, Ponte e Guerreiro (2021), reforçando a afirmação de Lamon (2012), concluem que os alunos devem ter a oportunidade de ser confrontados com todos os significados (parte-todo, quociente, operador e medida), não somente a uma abordagem de frações centrada na relação parte-todo. Segundo os autores,

> Cada significado proporciona determinados conhecimentos que são importantes para os alunos pelo que restringir o aluno a apenas a alguns significados dificulta a sua capacidade de construir um conhecimento mais abrangente (GRAÇA; PONTE; GUERREIRO, 2021, p. 711).

No entanto, é evidente que não é oportunizada, aos estudantes brasileiros e de muitos países, a instrução de frações com todos os significados, ficando restrita, principalmente na introdução das frações, somente ao significado parte-todo. Quanto à interpretação como medida, acreditamos que o fato de os livros didáticos não trazerem essa interpretação pode ser um motivo para os professores também desconhecerem tal interpretação, além de não ser discutida esta e outras interpretações de frações na formação acadêmica e continuada.

Pelos resultados apresentados nas pesquisas apresentadas e nos estudos que realizamos, acreditamos que a introdução de frações deve ser realizada pelo significado medida, inicialmente como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, e depois como ponto na reta numérica, favorecendo, desta forma, a compreensão dos números fracionários pelos estudantes.

Referências

ALEKSANDROV, A. D. A general view of mathematics. In: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N. (Ed.). **Mathematics**: its content, methods, and meaning. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, v. 1, p. 1-64. 1963.

BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A., **Rational Numbers Concepts in Acquisition of Mathematics Concepts and Process**, Ed by Richard Lesh e Marsha Landau, Londres, 1983.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational number, ratio and proportion. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook on research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, p. 296-333, 1992.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational Numbers Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. New York, NY: Academic Press, 1983.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W.R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional**. REVEMAT**: Revista Eletrônica de Educação Matemática.

Florianópolis, SC, v. 2, n. 1, p. 68-93, 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/ article/view/12992. Acesso em: 20, jul.2021.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, p. 107-152, 1951.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CORSO; L.V.; DORNELES, B.V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na Matemática. **Rev. Psicopedagogia, v.** 27, n. 83, p. 298-309. 2010.

DAVYDOV, V. V.; TSVETKOVICH, Z. H. On the objective origin of the concept of fractions. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 13, n. 1, p. 13-64, 1991.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Frações e suas múltiplas interpretações: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1-20, 2021.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESCOLANO, R. V. **Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente**. Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza, 2007.

FUCHS, L. S.; SCHUMACHER, R. F.; LONG, J.; NAMKUNG, J.; HAMLETT, C. L.; CIRINO, P. T.; JORDAN, N. C.; SIEGLER, R.; GERSTEN, R.; CHANGAS, P. Improving at-risk learners' understanding of fractions. **Journal of Educational Psychology**, *105*(3), p. 683–700, 2013. https://doi.org/10.1037/a0032446

GRAÇA, S.; PONTE, J.P.; GUERREIRO, A. Quando as frações não são apenas partes de um todo...! **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v. 23, n. 1, p.683-712, 2021.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement:** papers from a research workshop.Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p. 101-144.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E., (ed.) **Recent Research on Number Learning.** Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125- 150.

KIEREN, T. E. Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E., *et al* (Ed.). **Rational numbers:** An integration of research. New Jersey: Erlbaum., p.49-84, 1993.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential contente knowledge and instructional strategies for teachers. 3.ed. New York: Routledge, 2012.

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná.** Secretaria da Educação e do Esporte – SEED, Governo do Estado do Paraná, 2018.

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual Paranaense** (CREP). Governo do Estado do Paraná, 2019.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, Florianópolis SC. v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, Sergipe,n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma fração recebe seu nome. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: ReBECEM**, Cascavel, PR, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

RESNIK, L. B. Developing mathematical knowledge. **American Psychologist**, *v.44*, *n.2*, p.162–169, 1989. Disponível em: https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.2.162

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM.** Campo Mourão, PR, Brasil, v.09, n.20, 2020.

SCHMITTAU, J. Cultural-historical theory and mathematics education. In: KOZULIN, A.;GINDIS, B. et al. (ed.). **Vygotsky's educational theory in cultural context**. Cambridge, UK: Cambridge, 2003. p. 225-245.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoqueem números fracionários para a quinta série.** 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SOUZA, M.A.F.; POWELL, A.B. How do textbooks from Brazil, the United States, and Japan deal with fractions? **Acta Scientiai**, Canoas RS, *23*(4), 77-111, Jul./Aug. 2021.

TORBEYNS, J.; SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002.