EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS:

Pesquisa em Educação Matemática

ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA

STUDY OF THE THREE TEACHING DIMENSIONS FOR RATIONAL NUMBERS IN FRACTIONAL FORM

Saddo Ag Almouloud[1]

Maria José Ferreira da Silva[2]

Resumo

Neste artigo de cunho teórico, tecemos reflexões a respeito das três dimensões (epistemológica, econômica e ecológica) do problema didático de números racionais na forma fracionária, em razão da importância do ensino dessa unidade de conhecimentos matemáticos desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Para a realização deste estudo, tomamos como referências a Teoria Antropológica do Didático para evidenciar a razão de ser de número fracionário que leve o professor a construir um novo saber-fazer a partir da mobilização das Organizações Matemáticas resultantes do estudo das três dimensões do problema didático do referido objeto matemático. O estudo da dimensão epistemológica permitiu construir um Modelo Epistemológico de Referência – MER- composto por três modelos secundários: M_1 – associado à concepção de medida, M_2 – associado à concepção de quociente e M_3 – associado à concepção de razão. Esses modelos orientam o desenvolvimento de conhecimentos a respeito de medida, de distribuição e de comparação que são oriundos de situações que mobilizam, prioritariamente, essas concepções e que, para serem resolvidas implicam diretamente na mobilização da concepção parte-todo e, talvez, da concepção de operador. Quanto à dimensão econômica, observamos que as habilidades definidas pela BNCC para a apropriação de racionais na forma fracionária, embora evoquem situações que propusemos em nosso MER, não percebemos o foco em situações significativas que conduziriam o aluno a entender a necessidade desse novo campo numérico. No que diz respeito à dimensão ecológica, a BNCC parece evidenciar um dos nichos de números racionais que participam da sobrevivência da proporcionalidade, por exemplo. Mas algumas das restrições que podem dificultar e/ou impedir a justificação de tarefas sobre números fracionários são os desafios que os professores devem enfrentar no *design* de tipo de tarefas (e de tarefas) que permitam aos alunos alcançar as competências e habilidades relacionadas com a unidade temática “Números”, em especial com o objeto de conhecimento “números fracionários”. No final deste estudo, propusemos um Modelo Praxeológico Matemático de Referência desenhado a partir de nosso MER, em que sugerimos o trabalho com os três modelos secundários, apoiando-se na construção de organizações didáticas que considerem as organizações matemáticas desses modelos.

Palavras-chave: Dimensões de um problema didático; Números racionais; Teoria Antropológica do Didático.

Abstract

In this theoretical article, we reflect on the three dimensions (epistemological, economic, and ecological) of the didactic problem of rational numbers in fractional form, due to the importance of teaching this unit of mathematical knowledge since the early grades of Elementary School. To carry out this study, we used the Anthropological Theory of Didactics as references to highlight the reason for being of a fractional number that leads the teacher to build a new know-how from the mobilization of Mathematical Organizations resulting from the study of the three dimensions of the didactic problem of that mathematical object. The study of the epistemological dimension allowed the construction of an Epistemological

[1] Prof. Dr. em Matemática e aplicações, UFPA, saddoag@gmail.com

[2] Profa. Dra. em Educação Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, zeze@pucsp.br

Reference Model - MER- composed of three secondary models: M1 - associated with the concept of measurement, M2 - associated with the concept of quotient and M3 - associated with the concept of reason. These models guide the development of knowledge regarding measurement, distribution and comparison that come from situations that primarily mobilize these concepts and that, to be resolved, directly imply the mobilization of the part-whole concept and, perhaps, of the concept operator. As for the economic dimension, we observed that although the skills defined by the BNCC for the appropriation of rationals in fractional form evoke situations that we proposed in our MER, we do not perceive the focus on significant situations that would lead the student to understand the need for this new numerical field. Regarding the ecological dimension, the BNCC seems to highlight one of the niches of rational numbers that participate in the survival of proportionality, for example. But some of the constraints that can hinder and/or prevent justification of tasks over fractional numbers are the challenges that teachers must face in designing task types (and tasks) that allow students to achieve competencies and skills related to thematic unit "Numbers", especially with the object of knowledge "fractional numbers". At the end of this study, we proposed a Praxeological Mathematical Reference Model designed from our MER, in which we suggest working with the three secondary models, based on the construction of didactic organizations that consider the mathematical organizations of these models.

Keywords: Dimensions of a didactic problem; Rational numbers; Anthropological Theory of Didactics.

Introdução

A importância do ensino dos números racionais em suas representações fracionária e decimal é inquestionável para o desenvolvimento do aluno, tanto para sua cidadania, quanto para seu aprofundamento na aprendizagem matemática, que tem início já nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Uma rápida procura por pesquisas que tratam do tema mostra que tanto estudantes quanto professores ainda apontam dificuldades para ensinar e aprender números fracionários, que não ocorrem apenas nas séries iniciais, mas por toda a escolaridade básica.

De acordo com Silva (2005), uma das causas dessas dificuldades está relacionada ao uso dos termos fração, número racional ou número fracionário, pois muitos autores definem a fração como sendo um número racional, mas quando tratam de outros temas, representam números reais na forma fracionária. Entendemos que no ensino básico a fração é uma representação possível para números complexos e expressões algébricas e, por isso, quando iniciamos o ensino de frações, estamos proporcionando ao aluno condições de se apropriar de um registro de representação que, por sua vez, possibilitará a conceituação, a princípio, de números racionais.

Um outro ponto que interfere na compreensão da representação fracionária, como na conceituação de números racionais, são os obstáculos[3], de acordo com Brousseau

[3] Brousseau (1983 apud ALMOULOUD, 2010, p. 133):
a) um obstáculo é um conhecimento, uma concepção e não uma dificuldade, ou uma falta de conhecimento;
b) esse conhecimento produz respostas adequadas, em um certo contexto, frequentemente encontrado;
c) mas fora desse contexto, ele produz respostas falsas. Uma resposta correta e universal exige um ponto de vista notavelmente diferente;

(1983), principalmente os epistemológicos e didáticos. Para Silva (2005, p. 34-35), os primeiros referem-se à própria representação, “à negação da necessidade de quantidades fracionárias, a aceitação das frações como representação de números, o conhecimento dos naturais, a passagem do discreto para o contínuo.” O conjunto dos naturais se torna um obstáculo para a aprendizagem dos racionais, sobretudo porque nos racionais temos uma classe de frações representando um número, enquanto nos naturais isso não acontece. Os obstáculos didáticos, relacionados diretamente ao ensino, conduzem os alunos a compreensões errôneas como a fração não representando um número, mas dois naturais em posição especial, um em cima e outro embaixo, ou que o conjunto dos números racionais é o conjunto das frações, o que se revela equivocado quando o aluno estuda as frações algébricas, entre outros. O equívoco aqui é não perceber que o conjunto dos racionais contém todos os números que “podem” ser representados na forma fracionária, com numerador e denominador inteiros, mas afirmar que o conjunto dos racionais é o conjunto das frações, esquecendo, inclusive, que esses números também podem ser representados na forma decimal. Assim, entendemos que no ensino fundamental podemos tratar por número fracionário todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações que preservam as mesmas regras operatórias.

Há ainda que considerar a escolha das situações que conduzam o aluno a construir significado para a representação fracionária e para a conceituação dos números racionais. Por mais que o ensino esteja em busca de usar situações além das que envolvem a concepção parte-todo, ela ainda é prioritária e, conduz o aluno a continuar utilizando os números naturais quando faz a contagem das partes. É necessário buscar situações que mostrem a razão de ser desses números, ou seja, situações de medição, de distribuição e de comparação, que envolvem as concepções de medida, quociente e razão e que conduzem à concepção de parte-todo para serem realizadas e à concepção de operador provocada pelos cálculos.

---

d) além disso, esse conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento novo. Não basta possuir um conhecimento novo para que o precedente desapareça (é o que diferencia o transpor de obstáculos da acomodação de PIAGET); é, então, indispensável identificá-lo e incorporar a sua rejeição no novo saber;
e) depois da tomada de consciência de sua inexatidão, ele continua a manifestar-se de modo intempestivo e obstinado.

Neste artigo de cunho teórico, tecemos reflexões a respeito das três dimensões (epistemológica, econômica e ecológica) do problema didático de números racionais, na forma fracionária, em razão da importância do ensino dessa unidade de conhecimentos matemáticos desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Para a realização deste estudo, tomamos como referências a Teoria Antropológica do Didático -TAD - para evidenciar a razão de ser do número fracionário.

O estudo da razão de ser de conteúdos matemáticos, que advém de estudos epistemológicos, é próprio da TAD que, de acordo com Silva (2005), defende um sistema didático que interrompa a prática mecanizada instituída que ocorre "pelo abandono de problemáticas didáticas que poderiam ser provocadas por situações que levem o professor a construir um novo saber-fazer (p. 40), que mobilizem Organizações Matemáticas – OM resultantes do estudo das três dimensões de um problema didático dos números racionais em sua representação fracionária, que apresentaremos no que segue, após algumas ideias da Teoria Antropológica do Didático que sustentam este estudo. Apresentamos também as dimensões de um problema didático formalizadas por Gascón (2011) para explicitar os problemas de investigação em Didática das Matemáticas, apoiando-se na TAD.

A Teoria Antropológica do Didático e as três dimensões de um problema didático

Nesta parte, em primeiro lugar, tecemos algumas reflexões a respeito da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e, na sequência, das três dimensões (epistemológica, econômica e ecológica) de um problema didático que nortearão nosso estudo.

A Teoria Antropológica do didático

A TAD proposta por Chevallard (1997, 1999, 2002b) entende o conhecimento matemático como uma atividade humana de estudo de tipos de problemas, que identifica dois aspectos, um bloco prático (saber-fazer), formado por tarefas problemáticas de certo tipo e por técnicas utilizadas para resolvê-las, que são justificadas por um bloco de saber, que é identificado por um discurso que justifica e interpreta o bloco prático. Assim, tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias são a base desse modelo antropológico para a atividade matemática, que são chamados de organizações ou praxeologias matemáticas. A praxeologia matemática mais elementar é chamada de pontual, e se refere a um único tipo de tarefa, uma praxeologia mais ampla, formada por várias organizações pontuais, é chamada de organização local, e se refere a uma mesma tecnologia, e as regionais, que se referem a uma mesma teoria.

As noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria modelam as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática. Para Chevallard, podemos analisar qualquer prática institucional sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas, cujo cumprimento deriva do desenvolvimento de uma técnica (uma maneira de fazer). Para o autor, a relação institucional que se estabelece entre uma instituição I (aluno, professor, ...) e um objeto O depende das posições que as pessoas ocupam nessa instituição e do conjunto de tarefas que devem cumprir usando determinadas técnicas. Segundo Chevallard (1992, p. 127),

> um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente para I) se existir um objeto, que denotarei por R (X, O) (respectivamente RI (O)), a que chamarei relação pessoal de X com O (respectivamente relação institucional de I com O).

O problema de delimitar tarefas em uma prática institucional varia de acordo com o ponto de vista da instituição onde se desenvolve a prática ou de uma instituição externa que observa a atividade para descrevê-la com um objetivo preciso. Por esta razão, nossa pesquisa focaliza o estudo das relações de diferentes instituições com o número fracionário, a partir dos resultados da investigação das dimensões de um problema didático.

Bosch e Chevallard (1999) afirmam que a existência de uma técnica (legível e justificável) em uma instituição que a reconhece, é uma condição mínima para permitir seu controle e garantir a eficácia das tarefas feitas que, geralmente, supõem a colaboração de vários atores. "Essas condições e restrições ecológicas implicam então a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de *tecnologia* da técnica" (p.6) que, por sua vez, precisa também de uma justificação, que chamaram a teoria da técnica, ou seja, uma prática humana no interior de uma instituição está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um logos que a justifica, a acompanha, e que lhe dá razão.

Para Chevallard (2002a) um "saber-fazer", identificado por uma tarefa e uma técnica, não é uma entidade isolada, porque toda técnica, em princípio, exige uma justificativa, isto é, um "discurso lógico" (logos) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia, que vem descrever e justificar a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa.

Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular, que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. Para Bosch, Fonseca e Gascón (2004), a reconstrução institucional de uma teoria matemática requer elaborar uma linguagem comum que permita descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias da Organização Matemática Local (OML) que integram uma Organização Matemática Regional (OMR).

As praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas ou didáticas. As organizações matemáticas dizem respeito à realidade matemática que pode ser construída para ser desenvolvida em uma sala de aula, e as organizações didáticas à maneira de fazer essa construção; o que implica na existência de uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002b) define como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didática.

Em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem, pois seus componentes teóricos e tecnológicos perdem seu crédito. Em uma determinada instituição I surgem, muitas vezes, novas praxeologias que podem ser produzidas ou reproduzidas se elas existem em alguma instituição I'. A passagem da praxeologia da instituição I para a instituição I' é chamada por Chevallard (2002a) de Transposição Didática quando a instituição de destino é uma instituição de ensino (escola, classe etc.).

Os estudos dessas três dimensões de um problema didático são fundamentais para se propor qualquer modificação nas OD desenvolvidas no ensino dos números racionais em sua forma fracionária.

As três dimensões de um problema didático

As três dimensões básicas ou fundamentais foram introduzidas por Gascón (2011) para explicitar os problemas de investigação em Didática das Matemáticas, apoiando-se na TAD. Essas dimensões são: a epistemológica, que situa aquilo que é matemático no coração do problema; a económica[4] ou econômico-institucional, que despersonaliza a

[4] O termo *economia* é usado como uma acepção que propõe Molier (2007, p. 1098), em que se faz referência à economia de um organismo (ou sistema complexo qualquer), para referir-se à coordenação de

problemática didática e delimita a unidade mínima de análise dos processos de estudo, e a ecológica, que destaca as condições necessárias para que o estudo institucionalizado de matemática seja possível e apresenta de maneira manifesta as restrições de todo tipo que incide nesse estudo. Para o estudo dessas dimensões, apoiando-se na TAD, Lucas, Fonseca, Gascón, Casas (2014) afirmam que o principal objetivo reside em criar possíveis *razões de ser* das Praxeologias Matemática – PM, de tal forma que seja possível responder a certas questões, como por exemplo: que razões históricas motivaram a construção de uma determinada PM? A que situações problemáticas podem responder a PM? Que situações novas podem aparecer? Que problemas a PM vem resolver que as PM estudadas anteriormente não permitiam, ou seja, quais são as vantagens em estudar a referida PM?

Para Gascón (1999), um problema didático pode surgir de inquietações docentes quanto ao que ensinar, como ensinar e porque ensinar um conteúdo matemático, que não é suficiente para ser considerado como uma dimensão do problema didático. Para ser assim considerado, é necessário que se acrescente pelo menos a dimensão epistemológica, que busca a razão ou razões de ser de um determinado saber matemático, por um estudo histórico que busca seu desenvolvimento. Esse estudo conduz à elaboração de um Modelo Epistemológico de Referência – MER provisório, que será utilizado como parâmetro para estudo e análise do conteúdo pretendido. De acordo com Barquero, Bosch e Gascón (2013, p. 5), o MER "é o instrumento com que o didata pode *desconstruir* e *reconstruir* as praxeologias cuja difusão intrainstitucional e interinstitucional pretende analisar" que permite questionar a forma como as instituições interpretam o saber matemático. Para Gascón (2011), o didata deve explicitar "um MER relativo ao âmbito da atividade matemática que está em jogo em tal problema [...] de alcance local ou regional [...] em termos de organizações praxeológicas ou praxeologias." (p. 211).

Para Almouloud (2010, p. 156), a análise epistemológica tem por base o desenvolvimento histórico que permite identificar as diferentes formas de concepções de um determinado objeto matemático que poderão favorecer a análise didática.

Para estudar os fatores relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem de matemática, faz-se necessário considerar a natureza dos objetos matemáticos e tecer reflexões sobre o papel da atividade humana.

---

componentes (ou subsistemas) que intervém em seu funcionamento (apud Barquero, Bosch, Gascón, 2013, p. 15)

Barquero, Bosch e Gascón (2013) indicam que a **dimensão epistemológica** se faz importante e presente em todo e qualquer problema didático, em nosso caso, "como ensinar número fracionário", em que buscamos entender:

- a amplitude do âmbito matemático para situar nosso problema didático;
- os tipos de problemas oriundos da problemática;
- as tentativas de abordar e até mesmo solucionar tal problemática;
- as razões de ser desse objeto matemático e da problemática do seu ensino.

O entendimento desses aspectos permite vislumbrar o modelo epistemológico de referência do objeto matemático em estudo.

Além dessas questões, sugerimos o apoio nas seguintes questões (adaptadas de Barquero, Bosch e Gascón (2013)) para o estudo dessa dimensão:

Q1: Como o número fracionário pode ser descrito por meio de um modelo epistemológico de referência (MER) compatível com o modelo epistemológico geral da atividade matemática proposta pela TAD?

Q2: Quais características diferenciais (em relação àquelas usualmente encontradas na literatura) a TAD atribui às praxeologias relacionadas aos números fracionários?

Q3: Qual é a amplitude do campo matemático mais apropriado para planejar o problema didático de número fracionário? Quais as questões e tarefas matemáticas pontuais, áreas da matemática escolar ou matemática escolar, relacionadas com os números fracionários?

A outra dimensão é a **econômico-institucional,** que trata da gestão didática e, de acordo com Mineiro (2019, p. 24), "inclui as questões ligadas às contingências institucionais, às regras (*nómos*) que afetam o desenvolvimento de atividades ligadas ao estudo da matemática nessas instituições (*oikos*)", referindo-se à etimologia da palavra economia. Para Gascón (2011), nela se estudam, em uma determinada instituição, a organização e o funcionamento das OM e das Organizações Didáticas – OD envolvidas no problema didático. Para o autor, na TAD não há o estudo de fenômenos ou problemas didáticos que se referem à uma relação pessoal porque ela está determinada e pode ser explicada a partir da relação institucional.

O estudo da dimensão econômica visa a responder à seguinte pergunta: como as praxeologias relacionadas aos números fracionários se comportam em uma determinada instituição, BNCC, Parâmetros Curriculares, livros didáticos etc.? Nessa dimensão, precisamos estudar as questões relativas às condições que regulam a organização e o funcionamento de tais praxeologias na instituição de referência, ou seja, as questões relativas ao sistema de regras, princípios e leis (normas) que regem a vida institucional dela.

A **dimensão ecológica**, de acordo com Gascón (2011), inclui as dimensões epistemológica e econômico-institucional, porque se preocupa com o estudo da ecologia institucional das praxeologias matemáticas e didáticas. Esse estudo busca explicar por que as OM e OD são como são e quais condições e restrições institucionais favorecem ou impedem modificações que podem ser determinadas pela qualidade do material didático utilizado na instituição, pelos saberes de alunos e professores, recursos tecnológicos, e tempo para o estudo. Assim, de acordo com o autor, "é preciso considerar restrições e condições impostas nas praxeologias em todos os níveis de codeterminação didática, desde os mais genéricos, como a sociedade e a civilização, aos mais específicos, como o tema e a questão matemática concreta" (p. 217). Acrescenta que esses níveis propõem uma hierarquia entre as OM e as correspondentes OD, e que cada um deles determina "a ecologia institucional das OM e das OD tanto pelos pontos de apoio que oferece, quanto pelas restrições que impõe" (p. 217).

Esses níveis propostos por Chevallard (2001): Civilização <-> Sociedade <-> Escola <-> Pedagogia <-> Disciplina <-> Área <-> Setor <-> Tema <-> Questão orientam o estudo em uma instituição, observando que toda questão em estudo faz parte, no nosso caso, do tema números racionais em sua forma fracionária, que se insere no setor números racionais, que por sua vez se insere na área Números da disciplina de Matemática. Os níveis superiores, mais genéricos, civilização ocidental, sociedade brasileira, escola básica e pedagogia, em geral monumentalista, afetam diretamente o que ocorre na disciplina e nos níveis inferiores a ela. Para Chevallard (2013), essa pedagogia segue um paradigma clássico de visita a monumentos do conhecimento que devem ser visitados na escola, consequência de uma tradição e de reformas frenéticas. Para o autor, os conhecimentos são divididos em pequenas partes, que se apresentam "como um monumento com valor em si mesmo, que os estudantes devem admirar e desfrutar, embora não saibam quase nada de suas razões de ser, nem atuais, nem do passado" (p. 164).

A dimensão econômica-institucional permeia a dimensão ecológica, uma vez que o "nascimento", a "vida" e a possibilidade de "falecimento" e/ou "ressurgimento", prescindem das condições econômicas. Nesta perspectiva, a dimensão ecológica, dentre outros fatores, deve evidenciar (adaptado de Gascón, 2011; Barquero, Bosch e Gascón, 2013):

a) os âmbitos institucionais considerados;

b) as instituições envolvidas e as maneiras como descrevem e interpretam os números fracionários;

c) as práticas matemáticas existentes nas instituições envolvidas relativas aos números fracionários;

d) os modelos epistemológicos da matemática envolvida no seio das instituições;

e) as dificuldades que surgem ao se tentar modificar as OD em uma determinada instituição.

Essas evidências permitem, por exemplo, situar, em termos da Didática da Matemática, os *habitats* e *nichos* dos números fracionários no ecossistema do sistema educativo brasileiro. Os *habitats* são os ambientes conceituais (componentes curriculares, livros didáticos, por exemplo) onde os números fracionários se encontram e vivenciam suas práticas. Os *nichos*, por sua vez, contemplarão as suas funcionalidades e praxeologias, que se evidenciam pelas práticas que, em relação a um objeto de ensino, se distinguem em um dado *habitat* de um certo ecossistema, interagindo com os demais *nichos.*

Para estudar as dimensões econômicas e ecológicas da problemática didática, o pesquisador (ou professor) usa inevitavelmente - como referência - um modelo (que pode ser implícito) das praxeologias matemáticas que estão em jogo, isto é, um modelo epistemológico de referência (MER) do campo da atividade matemática em questão. Quando falamos de modelo epistemológico de referência, referimo-nos a formas de interpretar e descrever um campo conceitual de um objeto matemático (tema) que pertence a um setor e a uma área que é predominante nas instituições escolares, mas também na noosfera e nas instituições que produzem conhecimento matemático.

Assim, o MER é o instrumento com o qual o didata pode desconstruir e reconstruir as praxeologias cuja divulgação intrainstitucional e interinstitucional pretende analisar, e é essencial para estudar o conhecimento matemático antes de ser transformado para ser ensinado. Quando o MER é aberto e explicitamente exposto à crítica e ao contraste empírico, ele constitui um instrumento de emancipação (da didática e ciência didática) no que diz respeito ao modelo epistemológico dominante na instituição (Gascón, 2014).

Em coerência com este MER e com base nele, o formador (ou pesquisador) utiliza (e, eventualmente, constrói) um modelo didático do que significa «aprender» conhecimentos matemáticos do referido campo, em nosso caso, os números fracionários.

Estudo da dimensão epistemológica

Faremos o estudo dessa dimensão baseando-nos no estudo realizado por Silva (2005) a respeito da gênese dos números fracionários. A autora mostra que uma das primeiras razões de ser desses números se apresenta na antiguidade, com a necessidade de medições de terras pelos administradores do Estado (Egito). Esta necessidade levou cada sociedade a escolher diferentes unidades de medida e de representações para os resultados das medições desde a antiguidade, até uma tentativa de unificação com a introdução da unidade metro como medida de comprimento, no século XIX.

Uma primeira consequência da medição foi a necessidade da divisão das unidades de medida para que a própria medição pudesse ocorrer, ou seja, seria necessário conceber a parte de um todo, pois a busca por unidades que resultassem em um número inteiro se mostrou impossível. Desde os egípcios, que elaboraram uma tabela para converter frações do tipo $\frac{n}{10}$ em soma de fracionários unitários, a medição provocou a necessidade de registros para seus resultados, de cálculos com esses resultados, além da busca por generalizações para cálculos de medidas como áreas e volume.

Outra consequência do desenvolvimento das frações foi o surgimento de situações que tratavam do cálculo de valores desconhecidos, ainda na antiguidade, bem como de métodos como a falsa posição, por divisão ou por inversão como técnicas que as resolviam. A necessidade do cálculo de medidas de áreas, volumes, capacidades e tempo evoluem para o aperfeiçoamento das técnicas e a busca de generalizações que implicam o desenvolvimento de um discurso tecnológico-teórico para as justificarem.

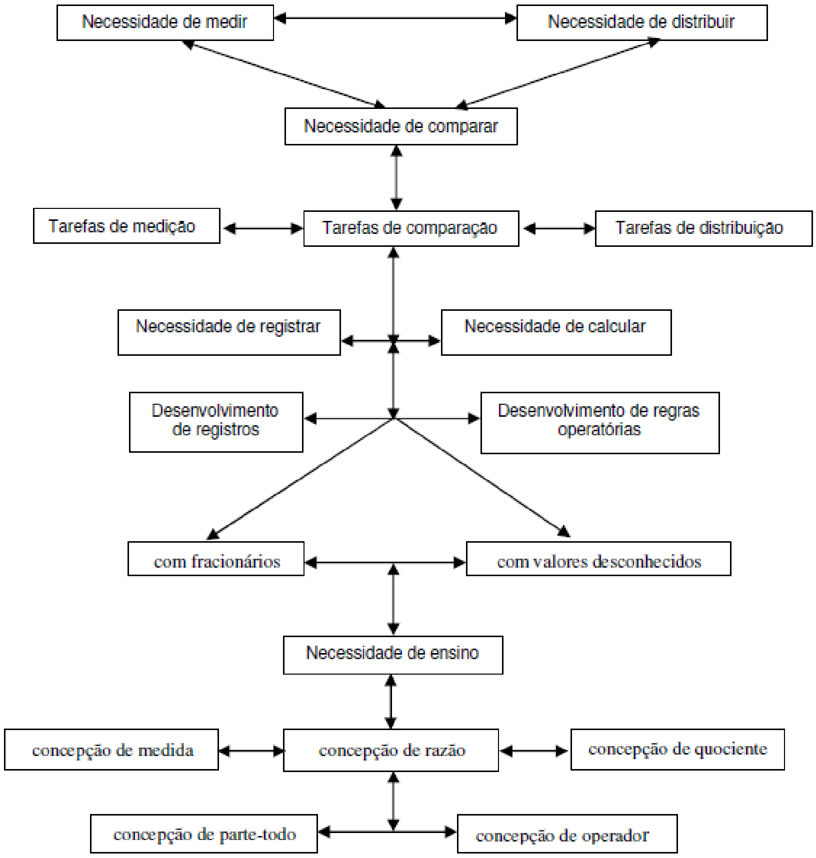
Além disso, muitas situações mobilizavam ainda a concepção de operador, como por exemplo, o problema 24 do papiro de Rhind, “uma quantidade, $\frac{1}{7}$ desta adicionada a esta, fica 19” (SILVA, 2005, p. 72). Há ainda situações, desde a antiguidade, que associam a situações de medição à concepção de razão como comparação de grandezas, por exemplo, para verificar a qualidade de pães no Egito, como o problema 69 do papiro de Rhind, "$3 + \frac{1}{2}$ heqats de farinha são transformados em 80 pães. Descubra a quantidade de farinha em cada pão e o "pesu"" (p. 80), e problemas financeiros que tratam de juros, como o problema 20 dos Nove Capítulos da China, "a soma de 94 niskas foram emprestadas em três partes com um juro de $\frac{1}{20}, \frac{3}{100}$ e $\frac{1}{25}$, obteve-se um lucro igual de cada uma das partes em 7, 10 e 5 meses, respectivamente. Diz matemático a quantidade de cada parte" (p. 82).

Além das práticas de medições, outras situações que aparecem desde a antiguidade são as que tratam de distribuição de bens e heranças que levam ao desenvolvimento da concepção de quociente para números fracionários. É o caso, por exemplo, deste problema dos Nove Capítulos da China (entre 200 e 100 a.C.), "cada trabalhador tem uma cota de inverno pelo seu trabalho de 444 chi [cúbicos]. Diz quantos trabalhados são precisos? Solução: $6\frac{2}{111}$ trabalhadores" (p. 83), que pode ser questionado por se tratar de uma grandeza discreta, que deveria ter uma resposta por número inteiro e não fracionário.

Cabe salientar que as representações fracionárias não eram consideradas números, por muito tempo os números eram só os naturais, mas de acordo com Boyer (2001, p. 52), na época de Euclides houve uma mudança, e as grandezas foram associadas a segmentos de retas, inclusive os inteiros, o que preservava para estes a representação de grandezas discretas, enquanto as grandezas contínuas passavam a ser tratadas por métodos geométricos. Por outro lado, em *Os Elementos de Euclides*, ele diferencia a representação fracionária da que representava uma razão, que utilizava $a : b$. Tal fato pode ser justificado pelo fato de a razão representar a comparação entre grandezas que não necessariamente significam uma divisão, ou seja, um número.

Até aqui, podemos dizer que as razões de ser para a representação fracionária são as necessidades de medir, distribuir e comparar, que mobilizam diretamente as concepções de medida, quociente e razão. As situações que tratam de medição e distribuição, para serem resolvidas, dependem da mobilização da concepção parte-todo para dividir a unidade de medida ou para dividir o objeto que será distribuído. Já as situações que envolvem razões podem ou não mobilizar tal concepção, porque é possível ter situações que envolvem apenas a comparação entre duas quantidades que não pode ser representada por uma fração. Além disso, as situações podem relacionar mais do que um tipo de concepção, além da concepção de operador. Podemos então sintetizar (Figura 1) que as necessidades de medir, distribuir e comparar conduzem ao desenvolvimento de tarefas de medição, de comparação e distribuição que, para serem resolvidas, necessitam de formas de representar seus resultados e de cálculos. Tais necessidades conduzem à escolha de unidades de medida e ao desenvolvimento de registros de representação[5] que variaram muito nas sociedades, além do desenvolvimento de regras operatórias, tanto para as representações fracionárias, quanto para valores desconhecidos como técnicas para resolver as tarefas apresentadas.

Figura 1 – Esquema da gênese histórica dos números fracionários



Fonte: Silva, 2005, p. 87

[5] Um **registro** de representação, segundo Duval (1995, apud Almouloud, 2010, p. 71), é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente. Nesse sentido, os registros se diferenciam dos códigos por serem estes funcionalmente mais limitados que os primeiros. A diferença entre registros e códigos, apresentada no esquema 9, evidencia a existência de dois níveis de funcionamento cognitivo: o consciente e o não-consciente; salienta-se que todo conhecimento implica necessariamente a mobilização desses dois níveis.

Como consequência dessas necessidades sociais, torna-se imperativo ensinar como medir, distribuir ou comparar que, desde a antiguidade com o papiro de Rhind até a atualidade, conduzem ao desenvolvimento de Organizações Didáticas para mobilizar, prioritariamente, as concepções de medida, de razão e de quociente, bem como as de parte-todo e operador.

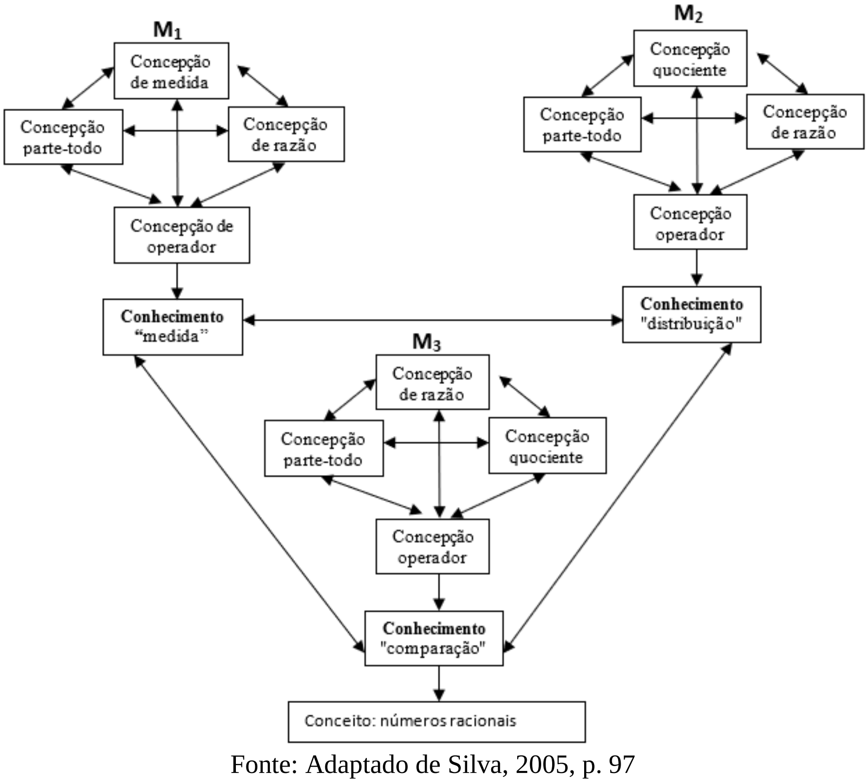
No entanto, a representação fracionária continuou a ser discutida na era moderna. De acordo com Boyer (2001, p. 173), no século XII, “a barra horizontal para frações [...] era usada regularmente por Fibonacci (e já era conhecida antes na Arábia), mas somente no século dezesseis seu uso tornou-se comum.” Para Silva (2005), Viète, em 1579, “utilizava uma barra vertical para separar a parte inteira da fracionária e recomendava a representação de fracionários decimais no lugar dos sexagesimais”, já Stevin, em 1585, “para representar décimos, centésimos, milésimos etc. colocava em um círculo, acima ou depois de cada dígito, a potência de dez assumida como divisor e recomendava o sistema posicional decimal, tanto aos números fracionários como aos inteiros” (p. 68). De acordo com Silva (1997), em 1614, Nappier impulsionou a utilização de frações decimais, Com o desenvolvimento dos logaritmos. Em que representava a separação da parte inteira da fracionária por um ponto.

Assim, a representação fracionária como utilizamos hoje e o sistema de numeração decimal posicional construído levaram a um grande avanço da matemática. Roberval (1602-1675) elaborou uma teoria a respeito de semigrupo ordenado de razões de grandezas, incluindo as frações no corpo dos números racionais. Ele era considerado um matemático profissional e participou da inauguração da Academia Francesa de Ciências em 1666. O desenvolvimento do sistema métrico decimal, em 1792, adaptado ao cálculo numérico do sistema decimal posicional, substitui os sistemas de unidades arbitrários, incoerentes e variáveis (Silva, 1997, p. 24). De acordo com a autora, foi em 1879 que Dedekind definiu corpo numérico, dando então ao conjunto dos números racionais essa estrutura algébrica e o desenvolvimento de um discurso tecnológico-teórico para justificar as técnicas utilizadas para resolver tarefas que envolvem os números racionais em sua representação fracionária. No entanto, de acordo com Neyret (1995), é na obra de Bézout, *Cours de mathématiques – a l´usage de la marine et de l´artillerie*, de 1798, cuja segunda parte trata de aritmética, que aparece, pela primeira vez, a representação fracionária tratada como número e com a representação por traço horizontal.

Vimos que grandes matemáticos se recusaram a aceitar o status de números às frações, mesmo após sua sistematização no século XIX. Um longo percurso também se percorreu para representar, por exemplo $\frac{1}{4}$ por 0,25, mesmo com o sistema decimal posicional tendo sido desenvolvido no século XVI. Esse sistema, já em uso, conduziu então ao sistema métrico decimal, em 1792, o que facilitou, principalmente, o comércio que vinha sendo realizado entre os diversos povos desde as grandes navegações. Tais feitos conduziram ao desenvolvimento da Álgebra, que veio para unificar a matemática a partir de generalizações como as estruturas algébricas, e o cálculo diferencial e integral que ajudaram a entender a passagem do discreto para o contínuo e do finito para o infinito.

Podemos então, a partir desse estudo histórico, apresentar o Modelo Epistemológico de Referência que desenvolvemos (Figura 2) para estudar as outras dimensões.

Figura 2: Modelo Epistemológico de Referência para a conceituação de Números Racionais



Fonte: Adaptado de Silva, 2005, p. 97

A partir das razões de ser definidas anteriormente, elaboramos nosso MER por três modelos secundários: M1 – associado à concepção de medida, M2 –à concepção de quociente e M3 –à concepção de razão que orientam o desenvolvimento de conhecimentos a respeito de medida, de distribuição e de comparação que, por sua vez, advêm de situações que mobilizam prioritariamente essas concepções, e para serem resolvidas implicam diretamente a mobilização da concepção parte-todo e, talvez, da concepção de operador. Essas situações conduzem ao entendimento da razão de ser do novo campo numérico, ou seja, permitem desenvolver um significado para esses números e tem o papel, de início, de desenvolver um registro de representação semiótica, bem como de propiciar tratamentos e conversões de representações.

A partir desse modelo e dos resultados dos estudos das outras dimensões, ao final, proporemos um Modelo Praxeológico Matemático de Referência para o ensino de números racionais em sua representação fracionária. Focamos na conceituação de números racionais, pois este é o primeiro conjunto numérico que mobiliza a representação fracionária no ensino fundamental, enquanto outros, como o conjunto dos polinômios, dos números reais e dos números complexos, são desenvolvidos ao longo de todo o ensino básico.

A dimensão econômico-institucional

Como vimos no estudo da dimensão epistemológica, as razões de ser dos números fracionários se relacionam com as necessidades de medir, de distribuir e de comparar, no entanto, a necessidade de ensinar conduz, desde a antiguidade, a uma perda dessas razões em favor do ensino de técnicas de cálculo. No Egito os escribas, responsáveis principalmente pela cobrança de impostos, precisavam ser preparados para sua função em escolas que teriam que elaborar "praxeologias didáticas com tarefas de diversos tipos e técnicas que as resolvam com o intuito de ensinar os conhecimentos necessários para se formar um escriba" (Silva, 2005, p. 94), o que é o caso, por exemplo, do papiro de Rhind.

Vemos que o início do desenvolvimento da representação fracionária implicou a transposição de técnicas da prática para uma escola que permaneceu de acordo com as necessidades da sociedade e de acordo com as civilizações oriental ou ocidental.

O desenvolvimento das sociedades para formas mais complexas de organização fez surgir os cursos de Engenharia e as Academias Militares e, consequentemente, a edição de tratados para esse ensino, enquanto as grandes navegações provocaram o aumento do comércio e a instituição do mercantilismo. Essas necessidades passaram a dominar o ensino da época. Os jovens iam para a escola para se tornarem, principalmente, militares. Segundo Saito (2015), nos séculos XIV e XV houve uma tendência a privilegiar um ensino menos teórico e abstrato “visto que a ciência parecia ser mais bem conhecida pelos mecânicos e artesãos do que pelos eruditos” (p. 161). Propostas de reformas criticavam o conservadorismo das instituições e tratados começaram a ser escritos em línguas regionais por aqueles que lidavam com conhecimentos práticos. Nessa época, houve uma mudança social “ligadas à ascensão da burguesia e à consolidação das monarquias nacionais que implicou na passagem da condição de mero artesão para a de burguês” (p. 163). Por outro lado, o desenvolvimento da imprensa, no século XV, conduziu à difusão de conhecimentos e estudos “ligados à astronomia e à música, bem como à geometria e à aritmética, foram impressos e divulgados entre muitos estudiosos de diferentes regiões da Europa” (p. 164).

No Brasil, de acordo com Valente (2002), as escolas militares tiveram início no século XVIII, por necessidade de defesa da colônia, com a Aula do Terço de Artilharia do Rio de Janeiro para os filhos de militares e de nobres. Em 1808, veio a Academia Real dos Guardas-Marinha e em 1810, a Academia Real Militar.

Um dos livros adotados foi a obra de Bézout, *Cours de mathématiques – a l´usage de la marine et de l´artillerie*, com primeira edição publicada em 1798, com conteúdos apresentados em itens. Na primeira página da parte que trata de aritmética, o autor afirma que:

> 3. Para se formar uma ideia exata de números, é necessário primeiro saber o que se entende por *unidade*.
> 4. A unidade é uma quantidade que se toma (arbitrariamente) para servir de termo de comparação a todas as quantidades de uma mesma espécie: assim, quando se diz, um tal corpo pesa cinco *libras*, a libra é a unidade; é a quantidade à qual se compara o peso desse corpo: se poderá igualmente tomar a onça por unidade [...]
> 5. O número expressa de quantas unidades ou partes da unidade uma quantidade é composta. Se a quantidade é composta de unidades inteiras, o número que a expressa se chama *número inteiro*; e se ele é composto de unidades inteiras e de partes da unidade, ou simplesmente de partes da unidade, então o número é dito *fracionário* ou *fração*: *três e meio* é um número fracionário, *três quartos* é uma fração. (Bézout, 1833, p. 1)

Classifica ainda os números como abstratos ou concretos, caso designassem ou não alguma unidade de medida. Nessa época, não havia sido desenvolvido os conjuntos numéricos como os conhecemos hoje, mas vemos que Bézout se ateve às características da representação mesmo considerando, a fração como número. Até o item 76, o autor tratou dos números inteiros e dos decimais apresentando suas regras operatórias com exemplos e aplicações. A partir do item 77 tratou das frações “consideradas aritmeticamente são números pelos quais se exprime quantidades menores que a unidade" (p. 38), as expressou com o traço horizontal e definiu numerador e denominador acrescentando que: "83. O numerador e o denominador se chamam também, de um nome comum, *os dois termos da fração*". No item 90, enunciou como reduzir frações a um mesmo denominador "para reduzir duas frações à um mesmo denominador, multiplicar os dois termos da primeira, cada um pelo denominador da segunda, e os dois termos da segunda, cada um pelo denominador da primeira" (p. 40). A seguir, apresentou o exemplo para as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, multiplicando 2 e 3 por 4 para obter $\frac{8}{12}$, que tem o mesmo valor que $\frac{2}{3}$, e depois multiplicando os termos 3 e 4 por 3 para obter $\frac{9}{12}$, que tem o mesmo valor que $\frac{3}{4}$. Observa-se que a fração não foi considerada como um número, mas por dois números naturais e a regra trata apenas de multiplicação desses números.

De acordo com Valente (2002), até início do século XIX a escola tratava de saberes técnicos e especializados porque eram ensinados para quem quisesse prosseguir seus estudos em áreas científicas e militares. Em 1827, foram criadas as escolas primárias gratuitas para ensinar a ler, escrever e contar, que compreendia as quatro operações fundamentais; em 1834, foram organizados os estudos secundários, nos liceus provinciais, porque já existiam universidades no Brasil e, em 1837, criou-se o Imperial Colégio Pedro II, para servir de modelo para o ensino secundário desenvolvido em oito séries. O colégio adotou o livro de geometria de Lacroix e o livro de aritmética de Bézout, traduzidos para o português. Há ainda o livro *Éléments d´Álgebre e Éléments d´Arithmétique* de Bourdon, que foi criticado por Cristiano Benedito Ottoni, em 1845, e editado até o final do século XIX. Na introdução aparece que:

> O sinal da divisão, que consiste em dois pontos: que se coloca entre o dividendo e o divisor, ou ainda, em uma barra $-$, acima e abaixo do qual se coloca respectivamente o dividendo e o divisor. Assim, 24 : 6 ou $\frac{24}{6}$ se enuncia 24 dividido por 6, ou o quociente de 24 por 6.
> $\frac{a}{b}$ ou a : b se enuncia a divido por b. Se diz ainda a sobre b. A notação $\frac{a}{b}$ é a mais utilizada. (Bourdon, 1897, p. 2 apud Silva, 2005, p. 92).

Percebemos que, efetivamente, o número fracionário recebeu outra representação, provavelmente influenciado pela álgebra, em que o traço fracionário foi substituído por "dois pontos" que, por outro lado, era uma representação especial para razões desde Euclides, ainda muito utilizada em livros brasileiros até o movimento da matemática moderna. No entanto, não se definiram regras operatórias para esse tipo de representação e essas duas representações e a definição de fração como quociente perduram até os dias atuais.

No entanto, o livro de Bézout foi editado, reeditado, traduzido e indicado ainda na era contemporânea quando, em 1849, o ministro francês o indicou para a instrução pública, influenciado por notas que foram acrescentadas a esse livro por Reynaud, em 1812. Em uma dessas notas, representava o número fracionário por $n\frac{a}{b}$ para indicar: "[...] o quociente do numerador pelo denominador ou como expressam que a unidade foi dividida em tantas partes iguais quantas as unidades que existem no denominador e que tomamos tantas dessas partes quanto há de unidades no numerador" (Neyret, 1995, p. 77 apud Silva, 2005, p. 89). Vemos claramente que o autor tomou o número fracionário como um quociente, o que implica uma contradição com a representação fracionária para situações que envolvem a concepção de razão, em situações de comparação que nem sempre conduzem a um quociente.

Como vimos, a obra de Bézout, utilizada por muito tempo nas escolas militares, privilegiou o ensino de técnicas a partir de exemplos numéricos não relacionados a qualquer situação da realidade, considerando sempre que a tarefa é do tipo calcular algo, não apresentando um discurso tecnológico-teórico que justifique tais técnicas. No entanto, na página 44, apresenta: *diferentes maneiras que se pode ver uma fração, e as consequências que se pode extrair*. No item 96, vem: "[...] pode-se considerar o numerador como representante de uma certa quantidade que deve ser dividida tantas partes quantas forem as unidades do denominador." No item 97, "pode se então considerar o numerador de uma fração como um dividendo, e o denominador como um divisor" para, em seguida, tratar da conversão de uma fração em decimal. Podemos inferir que, para o autor, a fração sempre representará uma divisão, o que não seria válido para alguns tipos de razões representadas na forma fracionária. Na sequência tratou das regras operatórias para as frações.

Com o tempo, o ensino de matemática foi unificado com relação aos conteúdos aritmética, geometria e álgebra e outros manuais passaram a ser utilizados, como é o caso da obra de Lacroix, em que definiu as dízimas periódicas e mostrou que o conjunto dos racionais é a reunião dessas com os decimais exatos e, com isso, introduziu o novo sistema métrico decimal.

Os primeiros autores de livros didáticos brasileiros se orientaram pelas obras de Lacroix e Bézout até meados do século XIX, mas até o final do século outras obras foram utilizadas, embora tendo sempre a matemática desenvolvida na França como referência.

Podemos dizer que desde o início, de acordo com as necessidades práticas, específicas das sociedades e da época, o ensino de números fracionários têm se focado apenas no componente saber-fazer das praxeologias matemáticas a partir de definições e exemplos numéricos, sem referência a situações que mobilizem as razões de ser que mostramos em nosso MER. Além, disso as escolas secundárias tinham públicos e objetivos específicos, porque era reservado para os que conseguiam frequentá-las, aprender a ler, escrever e contar.

Em 1919, Euclides Roxo se torna professor de matemática do Colégio Pedro II. Em 1923, publica Lições de Arithmetica, e em 1929, para atender à renovação do ensino de Matemática, publicou a obra Curso de Matemática Elementar. De acordo com Valente (2004, p. 118-119), para Roxo, "quando a unidade suposta é dividida em um certo número de partes iguais e se tomam uma ou mais dessas partes, o resultado assim obtido chama-se fração" e apresenta como exemplo: "seja AB um segmento que representa a unidade de comprimento dividida em 20 partes iguais, de modo que cada parte é um vigésimo da unidade." Segundo Valente (2002), Roxo utilizou uma representação geométrica para facilitar o entendimento dos leitores, no entanto vemos que ela privilegiou a concepção parte-todo que, em seguida adquiriu vida própria e foi amplamente utilizada na introdução do ensino de números fracionários, distanciando-se das razões de ser que lhe dariam algum significado. Entendemos que esse movimento procurou facilitar a compreensão da criança a partir de seus conhecimentos de números naturais, mas que de certa forma a impediam de entender a fração como a representação de um número, porque continuaram trabalhando com dois números naturais, como vimos fortemente nos autores do século XIX.

Atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento oficial de referência nacional para subsidiar a elaboração dos currículos do sistema de ensino, que podemos entender como um dos âmbitos institucionais que devemos considerar ao abordarmos o problema didático de números fracionários para verificar como são descritos e interpretados nas tarefas **a serem desenvolvidas**. Esse documento de caráter normativo,

> [...] define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusiva- mente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)[1], e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)[6] (Brasil, 2019, p. 7)

A BNCC apresenta as unidades de conhecimentos que devem ser ensinados/aprendidas apoiando-se em um conjunto de competências e habilidades essenciais que todos os alunos do ensino básico devem construir. No Ensino Fundamental, a área de Matemática, por meio da articulação de seus diversos campos - Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade -,

> precisa garantir que os alunos relacionem observa-ções empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade mate-mática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver proble-mas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (Brasil, 2019, p. 265).

Além disso, o documento afirma que o Ensino Fundamental

> deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso. (Ibid, p. 266)

De acordo com esse documento, esses pressupostos, em articulação com as competências gerais da Educação Básica, a área de Matemática e, por consequência, o componente curricular de Matemática, devem garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas. Competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitiva e

---

[6] Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192 acessado em 17/02/2021.

socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2019, p. 8). As habilidades referem-se às aprendizagens que devem ser garantidas aos educandos nos mais diversos contextos escolares, e estão relacionadas a objetos de conhecimento (conteúdo, conceitos e processos).

A unidade temática **Números** visa que o aluno desenvolva o pensamento numérico "que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades" (p. 268). Nesta perspectiva de formação, os alunos necessitam desenvolver, entre outras, "as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática" a partir de "situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos", em que "devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações" (p. 268).

De acordo com a BNCC (Brasil, 2019, p. 290), as ideias preliminares de fração[7] são introduzidas no 4º ano do Ensino Fundamental, em que é requerida do aluno a habilidade de reconhecer, com o auxílio da reta numérica, as frações unitárias com denominadores 2, 3, 4, 5, 10 e 100 como unidades de medidas menores que uma unidade. Além disso, o educando deve reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para os números racionais na representação decimal. Entendemos que estas habilidades podem ser desenvolvidas, mostrando ao aluno a razão de ser destes novos números, se efetivamente os alunos localizarem em uma reta numérica esses números utilizando a medição, e não recebendo uma representação para que identifiquem a fração a partir da dupla contagem mobilizando a concepção parte-todo.

Ao chegar ao 5º ano, o objeto de conhecimento "números racionais" deve ser ampliado, e as habilidades desejadas são as seguintes: com o auxílio da reta numérica, identificar e representar frações, maiores ou menores que a unidade; identificar frações equivalentes; comparar e ordenar as frações; e utilizar as representações percentuais 10%, 25%, 50%, 75% e 100% a décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, respectivamente. Em relação ao ensino das operações, no 5º ano, as quatro operações devem ser ampliadas para os números racionais na forma decimal. A utilização da reta numérica associada à concepção de medida pode conduzir os alunos às primeiras

[7] Quando a BNCC fala de fração, entendemos que se trata de número fracionário como o definimos no início deste texto.

operações com os números fracionários e de suas possíveis relações com números decimais, mas este ponto não é citado.

Quanto à unidade temática de álgebra, propõem o ensino de "propriedades da igualdade e noção de equivalência" e de "grandezas diretamente proporcionais e problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais" (p. 294-295). Nas habilidades, sugerem a possibilidade do trabalho com situações de comparações que poderiam ou não resultar em razões possíveis de serem representadas por números, no caso da receita, por exemplo, dificilmente a comparação resulta em um número fracionário.

No 6º ano, deve-se compreender frações no que diz respeito aos significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações. Esses significados são pautados pelas seguintes habilidades:

> EF06MA07: Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
> EF06MA08: Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
> EF06MA09: Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
> EF06MA10: Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária. (Brasil, 2019, p. 301).

Neste ano escolar, privilegia a concepção parte-todo, dando-lhe vida própria, e a concepção de quociente relacionada à operação de divisão e não a situações de distribuição que preservaria uma das razões de ser desses números. Implicitamente, aborda a concepção de operador como "fração de um número natural", mas na habilidade explicita, o cálculo da "fração de uma quantidade", mas que deve resultar em um número natural.

Quanto ao tema de álgebra, um dos objetos de conhecimento são "problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo" (p. 302-303), para que os alunos desenvolvam habilidades que mobilizem partilha de uma quantidade em duas partes desiguais (situação de distribuição) além da razão. Aqui se veem privilegiadas as relações parte-todo e parte-

parte, mas o documento não especifica se as quantidades advêm de grandezas discretas ou contínuas.

A BNCC (Brasil, 2019, p. 426) indica que no 7º ano escolar, deve-se ensinar aos alunos as ideias relacionadas à compreensão, ordenação de frações associadas de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador, identificando frações equivalentes. Sugere também (EF07MA09, p. 307) "utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza".

O documento sugere a ampliação da compreensão de ordenação e equivalência de representações fracionárias e cita a concepção de razão pela primeira vez, como se a razão e o número fracionário fossem equivalentes. No entanto, nem sempre isso ocorre, porque, principalmente, quando se trata de grandezas diferentes, a representação fracionária para uma razão pode não representar um número, mas apenas uma comparação.

Para o tema de álgebra, apresentam o objeto de ensino "problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais", para que o aluno desenvolva a habilidade de "resolver e elaborar problemas que envolvam a variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas" (p. 306-307). Neste ponto, o documento já recomenda que seja feito um trabalho algébrico propriamente dito, em que as frações algébricas devem ser abordadas, ou seja, as frações compostas por polinômios.

No 8º ano, a BNCC recomenda trabalhar problemas que envolvem o reconhecimento e a utilização de procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica. Na unidade temática de álgebra, continua o trabalho de identificação de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais ou não proporcionais e de resolução de problemas por meio de estratégias variadas.

Para o 9º ano, no tema números, um objeto de conhecimento é a "necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta", em que o aluno deve "reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade" (p. 316-317). Já no tema de álgebra, um objeto de conhecimento é a "razão entre grandezas de espécies diferentes”, como velocidade e densidade demográfica. Embora o documento apresente aqui a necessidade de novos números, os irracionais, para possibilitar qualquer medição, a necessidade dos racionais não foi citada em nenhuma das habilidades para os anos do ensino fundamental.

À luz do estudo da BNCC, nas habilidades definidas para a apropriação de número fracionário, ainda que evoquem situações que propusemos em nosso MER, não percebemos o foco em situações significativas que conduziriam o aluno a entender a necessidade desse novo campo numérico. Outro ponto a ser considerado é a representação fracionária para razões e sua relação com a divisão, o que pode conduzir a obstáculos didáticos que prejudicam a conceituação de números racionais. Embora o documento foque na resolução de problemas, que consideramos ter sua importância, não vimos qualquer objeto de conhecimento que conduza à sistematização do conjunto dos números racionais, ou seja, sua descontextualização e conceituação.

Embora pareça estar de acordo com nosso MER, esse documento, composto pelos três modelos secundários: M_1 (associado à concepção de medida), M_2 (associado à concepção de quociente) e M_3 (associado à concepção de razão), não apresenta, explicitamente, orientações para o desenvolvimento de conhecimentos a respeito de medida, de distribuição e de comparação oriundos de situações que mobilizem essas concepções e que na sua resolução, fazem apelo à concepção parte-todo e, talvez, à concepção de operador. Por outro lado, não temos elementos para identificar as tarefas que vivem nesta instituição, nem como elas se relacionam, no sentido da TAD, já que a BNCC oferece unicamente recomendações e sugestões que permitiriam alcançar as competências e habilidades relacionadas à aprendizagem de números fracionários.

Com relação à análise de materiais didáticos, apresentamos resultados de pesquisas produzidas na área. Dias (2018, p. 69) observa, em sua análise de pesquisas que tratam de números fracionários, “uma mudança significativa, ao propor a relação das diferentes concepções desses números, por outro lado, fica nítida que a concepção parte-todo parece enraizada na abordagem desse conteúdo matemático.”

Analisando livros didáticos para o 4º ano do Ensino Fundamental, Landim e Morais (2019, p. 564) afirmam que de 58 tarefas que envolviam números fracionários, 34 estavam associadas à concepção parte-todo e à técnica da dupla contagem das partes que privilegiam apenas o bloco saber-fazer. Acrescentam que as outras 24 tarefas mobilizavam a concepção de operador.

Flores e Bisognin (2020) analisaram uma coleção de livro didático de Matemática para o Ensino Fundamental II no sentido de observarem os significados de números racionais utilizados. Nele, citam a pesquisa de Lessa (2011), que analisou livros didáticos de 1927 a 2010 e "destaca que os significados mais abordados são parte-todo e operador e que o livro mais antigo analisado é o que trabalha com a maior variedade de significados para os números racionais" (p. 40). Quanto ao livro do 6º ano analisado, as autoras encontraram 54 atividades em que os significados de operador, parte-todo e quociente foram os mais mobilizados, nessa ordem, e nenhuma associada ao significado de razão e medida. No entanto, algumas não classificadas quanto ao significado tratavam de "classificação de frações como aparentes ou não, simplificar frações ou de atividades em que era solicitado [..] resultados de operações" (p. 37). No livro do 7º ano, Flores e Bisognin (2020) encontraram a definição formal de número racional como quociente de dois números, com o divisor diferente de zero e a localização de um número racional na reta numérica. Percebe-se que o autor não afirma que esses números são inteiros. Acrescentam que o autor trabalha a representação fracionária e decimal de números racionais no mesmo capítulo e que das 65 atividades, apenas cinco puderam ser associadas a algum significado parte-todo, quociente e medida, enquanto as restantes tratavam de procedimentos operacionais ou de ordenação. O livro do 8º ano, em uma seção que trata dos números naturais, inteiros e racionais, trata da impossibilidade de divisão nos números inteiros como justificativa para a necessidade dos números racionais. Da mesma forma que no livro anterior, aborda as duas representações dos números racionais, focando as atividades na forma decimal e apenas três atividades focando nos significados parte-todo, quociente e medida. As autoras concluem que, embora o significado parte-todo seja privilegiado, há predominância de atividades que envolvem operações e procedimentos, o significado de medida se concentra em atividades que solicitam a localização de pontos na reta numérica, o significado de quociente foi pouco encontrado, e o significado de razão esteve ausente.

Podemos concluir que, na instituição escola de Ensino Fundamental, o sistema educativo brasileiro não enfoca o ensino dos números fracionários a partir de suas razões de ser, a partir de situações que envolvam medição, distribuição e comparação, para privilegiar artifícios que tratam da concepção parte-todo com sua técnica de dupla contagem das partes, apesar de que só faria sentido se fosse decorrente das ações de medir, distribuir ou comparar. Além disso, como na antiguidade, continuamos nos centrando no bloco do saber-fazer sem desenvolver o bloco do saber que justifica tais técnicas e, com isso, não desenvolver praxeologias matemáticas propriamente ditas.

A dimensão ecológica

Nos séculos XVI e XVII, segundo Saito (2015), continuou a distinção entre geometria e aritmética, sendo a primeira considerada a ciência das grandezas e a segunda a ciência dos números, embora agrimensores e navegadores, entre outros práticos, aplicassem o número à grandeza geométrica. Acrescenta, que essa relação foi objeto de estudo de diferentes estudiosos, mas que só se fundamentou com o tratado de aritmética de Stevin, embora tratados árabes já expressassem grandezas geométricas por números (p. 173).

Considerando que o ato de medir significa associar um número, que depende da escolha de uma unidade de medida, à grandeza que está sendo medida e que essa prática ocorre desde os egípcios, foram necessários milênios para que efetivamente os resultados de medições fossem considerados números, embora isso já ocorresse na prática.

De acordo com Barbosa e Magalhães (2008), durante Idade Média "a educação era garantida pela aprendizagem através de tarefas realizadas juntamente com os adultos" e viver ou não a infância dependia de condições econômicas, sociais e culturais. Mas até o final do século XVIII, as escolas eram frequentadas por pessoas de qualquer idade por ter um caráter mais técnico que pedagógico, e se diferenciava de acordo com as classes sociais, o que excluía as crianças e o ensino para todos.

Dessa forma, podemos inferir que, por um lado, havia condições favoráveis ao ensino de tarefas e técnicas, principalmente para os filhos de artesãos, mas restrição ao discurso tecnológico-teórico, porque ainda tinha sido desenvolvido pela própria matemática.

Barbosa e Magalhães (2008) acrescentam que no século XIX, a revolução industrial intensificou a exploração do trabalho infantil, principalmente de famílias pobres, e o recolhimento de menores infratores abandonados nas ruas. Essas ações começaram a ser questionadas e culminou com uma nova concepção de infância, que fez com que as escolas passassem a ter relevância na vida de crianças e jovens. As primeiras escolas surgiram, com crianças e professores em salas de aula, promovidas por instituições católicas para ensinarem, em um primeiro momento, a leitura e a escrita, e posteriormente instituiu-se o ensino de matemática. Com isso tiveram início discussões a respeito do ensino e da aprendizagem dos conteúdos escolares, pois as crianças necessitavam de uma educação geral e não de técnicas para o exercício de um ofício.

No entanto, como vimos anteriormente, o modelo adotado durante o século XX pela escola permaneceu privilegiando o ensino de técnicas em situações artificiais, que no caso dos números fracionários, não ocorre a partir de situações que mostrem sua razão de ser, pelo contrário, privilegiam o modelo parte-todo com a dupla contagem das partes, o que, de acordo com nosso MER, não se constitui um modelo para o ensino.

O estudo da dimensão ecológica, segundo Almouloud (2015, p. 15), trata de responder às seguintes questões:

> [...] O objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Tal objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado? As respostas a estas questões permitem identificar a razão de ser desse objeto de saber na instituição escola.

A análise da BNCC, no estudo da dimensão econômica, mostra que o objeto matemático número fracionário é um dos objetos de conhecimentos previstos para ser ensinado/aprendido de 4º a 9º ano do ensino fundamental. Com relação à Matemática, destaca que os diferentes campos que a compõem congregam um "conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação" (p. 268), assim "a proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc." (p. 268).

O documento recomenda também que para aprofundar a noção de número, é importante colocar os alunos frente a tarefas que envolvam, por exemplo, medições, "nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária" (p. 269).

A BNCC parece evidenciar um dos nichos de números fracionários que participa da sobrevivência da proporcionalidade, por exemplo, inclusive em sua representação algébrica. Mas algumas das restrições que podem dificultar e/ou impedir a justificação de tarefas sobre números fracionários são os desafios que os professores devem enfrentar no design de tipo de tarefas (e de tarefas) que permitam aos alunos alcançar as competências e habilidades relacionadas com a unidade temática "Números", em especial com o objeto de conhecimento "números fracionários".

Um dos desafios para os professores do ensino fundamental é a articulação entre os três modelos secundários (de nosso MER), M_1 (associado à concepção de medida), M_2 associado à concepção de quociente) e M_3 (associado à concepção de razão), para que o conceito de número racional viva no ecossistema educativo e que alimente a construção de outros conhecimentos.

Em termos de ecologia, vivemos em uma civilização ocidental, na sociedade brasileira, na escola de ensino fundamental que privilegia a pedagogia monumentalista para a disciplina de Matemática, na área de números e no setor de números racionais cujo tema é a conceituação desses números. Tal conceituação depende da construção de dois registros de representação, o fracionário e o decimal, bem como suas regras operatórias e conversão de representações, que se desenvolverá a partir de situações significativas que preservam suas razões de ser. A construção e compreensão de tais registros resultaram na construção da maioria dos conhecimentos das outras unidades temáticas de todo o ensino básico. Além disso, a conceituação dos números racionais também depende de sua descontextualização, ou seja, de serem tratados efetivamente como números, o que implica chegar à definição do conjunto dos números racionais e de suas propriedades. Os conhecimentos de números racionais alimentarão a conceituação de outros conjuntos numéricos. Entendemos que, a pedagogia escolhida nessa escola ainda restringe o ensino significativo dos números fracionários e, em consequência, dos números racionais. Assim, a partir dos estudos realizados, buscamos desenvolver um modelo praxeológico de referência, como uma proposta alternativa a esse ensino, que permita desenvolver nos alunos as habilidades e competências pretendidas na BNCC.

Proposta de um modelo praxeológico matemático de referência

De acordo com nosso MER, temos que trabalhar com os três modelos secundários associados à concepção de medida, de quociente e de razão. Para isso, precisamos construir organizações didáticas que considerem as organizações matemáticas desses modelos. Na impossibilidade, neste artigo, de mostrar tais praxeologias, nos deteremos a identificar, para cada modelo, os tipos de tarefas da OM considerada que não implica sugerir uma ordem, tendo em vista que as OD podem apresentar tipos de tarefas de diferentes modelos.

Quanto ao primeiro modelo, M_1, de acordo com Silva (2005, p. 117), "as tarefas envolvendo medições de comprimento são apropriadas para a percepção da limitação dos números naturais como resultados de medições, e da necessidade de "novos números para a quantificação adequada de comprimentos." De acordo com a autora, trata-se aqui apenas de tarefas que envolvem medidas de comprimento por entender que o desenvolvimento de suas técnicas seriam as primeiras a serem desenvolvidas e propiciam o incremento de técnicas para outras grandezas. No entanto, isso não impede que no momento certo, o professor não desenvolva outros tipos de tarefa.

Essas tarefas solicitam a manipulação de três tipos de representação: a figura de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário $\frac{1}{b}$ para representar a subunidade, considerando que a unidade de medida foi dividida em b partes para possibilitar a medição, e o número fracionário $\frac{a}{b}$ como resultado da medição que permite a compreensão de que a subunidade $\frac{1}{b}$ foi utilizada *a* vezes. A necessidade da divisão da unidade envolverá a concepção parte-todo. Apresentamos no Quadro 1 uma síntese com quatro tipos de tarefa que envolvem uma grandeza contínua, comprimento, e respectivas técnicas.

Quadro 1 – Síntese de tipos tarefas e técnicas associadas à concepção de medida.

	Tipos de Tarefas	**Grandeza**	**Técnicas**
1º	Determinar medidas de objetos	Contínua	Determinar unidade e subunidades
2º	Determinar medidas em segmentos divididos em partes congruentes.	Contínua	Dupla contagem
3º	Determinar medidas em segmentos não divididos em partes congruentes	Contínua	Dividir o segmento em partes de mesma medida e contagem
4º	Reconstituição da unidade	Contínua	Divisão da parte apresentada para identificar 1/n e recompor a figura

Fonte: Adaptada de Silva (2005, p. 143)

A autora sugere, para o primeiro tipo de tarefa, por exemplo, que se solicite a medição de objetos diversos, utilizando tiras de papel de diferentes comprimentos, para que a necessidade da divisão da unidade seja percebida, além de régua de polegadas e régua milimetrada. O uso de unidades diferentes permite ao aluno perceber que o número obtido como resultado depende da unidade escolhida e, portanto, o objeto medido pode ser associado a números diferentes. Já no quarto tipo de tarefa, pode-se dar um segmento para representar a parte de um inteiro, para que este seja identificado. Para Silva (2005), esses tipos de tarefas permitem trabalhar com números fracionários maiores que um e a adição de dois números fracionários de mesmo denominador, além da relação de equivalência pelo reconhecimento de que a mesma parte pode receber nomes diferentes, o que conduziria a percepção de que um número racional é representado por uma classe de frações.

A concepção de quociente envolve tarefas associadas à distribuição de grandezas em que o número fracionário $\frac{a}{b}$ obtido como resultado representa que *a* foi dividido em um número *b* de partes congruentes, no caso de a grandeza ser contínua, e iguais no caso de a grandeza ser discreta. Em geral, utiliza-se na técnica a operação de divisão, o que daria sentido a entender, em algumas situações, a fração associada a ela. Nestas tarefas, podemos tratar de grandezas diferentes, como crianças e chocolates e, ainda, considerar o numerador maior, menor ou igual ao denominador. No Quadro 2, apresentamos uma síntese dos tipos de tarefas associados à essa concepção.

Quadro 2: Síntese de tipos de tarefas e técnicas associadas a concepção quociente

	Tipos de tarefas	Grandeza	Técnicas
1º	Distribuir igualmente x objetos em um número y de partes	Contínua	1º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes ou manter objetos inteiros e dividir só o que for necessário 2º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes
		Discreta	Divisão de naturais
2º	Distribuir igualmente x objetos em uma determinada cota.	Contínua	Dividir a quantidade de objetos pela cota dada
		Discreta	Divisão de naturais

Fonte: Adaptado de Silva (2005, p. 143)

O primeiro tipo envolve tarefas como, por exemplo, dividir igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas e o segundo tipo, quantas crianças receberão chocolate, se distribuirmos igualmente três chocolates, de tal forma que cada uma receba $\frac{3}{5}$.

Quadro 3: Síntese de tarefas e técnicas para a concepção de razão.

	Tipos de tarefas	Grandeza	Técnicas
1º	Determinar uma razão	Contínua	1º caso: situação todo-todo Escrever na forma fracionária as medidas explícitas ou medir os objetos antes se for o caso. 2º caso: situação parte-parte A mesma técnica do caso anterior 3º caso: situação todo-todo com grandezas de naturezas diferentes. Associar a razão encontrada à divisão

		Discreta	1º caso: situação todo-todo Dupla contagem 2º caso: situação parte-parte de inteiros diferentes Dupla contagem 4º caso: situação parte-parte no mesmo inteiro Dupla contagem 5º caso: situação parte-parte no mesmo inteiro sem figuras Escrever na forma fracionária os dados apresentados
2	Determinar valor desconhecido	Contínua	proporcionalidade entre as medidas dadas
		Discreta	proporcionalidade entre as quantidades dadas
3º	Comparar razões	Contínua/discreta	Determinação de razões equivalentes com mesmo denominador

Fonte: Adaptado de Silva (2005, p. 144)

A concepção de razão está associada à ideia de comparação entre medidas de duas grandezas e a representação numérica obtida da comparação não necessariamente transmite a ideia de número, mas de um índice comparativo. Nesse sentido, em geral, a representação $\frac{3}{5}$, por exemplo, seria lida como “três para cinco” e não como “três quintos”, e encaminha naturalmente para a equivalência de razões e o raciocínio proporcional, noções importantes para a resolução de problemas. No Quadro 3, mostramos três tipos de tarefas que mobilizam a concepção de razão e as possíveis técnicas para solucioná-las.

Dependendo do tipo de grandeza, as técnicas levam à comparação entre grandezas de mesma natureza ou não e podem mobilizar relações do tipo todo-todo (comparação de dois inteiros), parte-parte (compara quantidades de duas partes de um inteiro ou partes de dois inteiros) e parte-todo. O ponto fundamental dessas técnicas é a não possibilidade de relacionar o resultado da comparação com a operação de divisão, pois nem sempre tem algum significado. Embora possamos determinar praxeologias matemáticas para as concepções parte-todo e operador, elas devem ser consequências do trabalho com as três anteriores, por isso não as consideramos explicitamente em nosso MER.

Associadas à concepção de medida e à grandeza área, bem como à concepção de quociente e razão, sugere-se tratar tarefas que geralmente são realizadas com foco na concepção parte-todo, atreladas à expressão “partes iguais” para envolver a contagem, e são privilegiadas como ponto de partida para o ensino de números fracionários. Silva (2005, p. 143) identifica quatro tipos de tarefa: relacionar à uma figura um número fracionário; identificar um número fracionário dado em uma figura; compor inteiros e determinar fracionário e reconstituição do inteiro, que também poderiam ser tratadas com grandezas discretas. No entanto, essas situações não podem ser trabalhadas com números fracionários maiores que um, porque não temos como explicar, por exemplo, que dividimos um inteiro em três partes e, de repente, temos que considerar cinco. A representação de mais um inteiro não resolve o problema, porque passamos então a ter seis partes. Além disso, para as grandezas discretas, pode surgir a dificuldade de divisão igualitária, como no caso, de identificar ¼ de 15 bolinhas, que conduz à divisão de números naturais, que apresentará a sobra de uma bolinha.

Para as concepções de medida, quociente e razão, se poderiam abordar tarefas que mobilizem a concepção de operador, que geralmente privilegiam cálculos com números fracionários, principalmente a multiplicação, porque a fração apresentada deve atuar sobre uma quantidade para produzir uma nova quantidade. Silva (2005) identifica seis tipos de tarefas para a concepção de operador: transformar quantidade de grandezas pela ação de um operador fracionário; transformar quantidades de grandezas pela ação de dois operadores; determinar o operador que faz uma certa transformação; comparar operadores, comparar estados iniciais e finais; determinar operadores que não modificam o estado inicial; determinar o operador que substitui a ação de vários operadores e determinar a porcentagem de uma quantidade. Tais tarefas conduzem à compreensão de equivalência, de inverso de um número, da identidade, da multiplicação, ... de números fracionários.

Cabe esclarecer que o modelo aqui apresentado foca na conceituação de números racionais que, em certo momento, deve ser descontextualizado para ser definido formalmente para que um trabalho efetivamente com números seja realizado. A partir daí, vêm então as representações fracionárias com números reais e polinomiais com suas representações algébricas.

Conclusões

Não resta a menor dúvida de que o ensino de números fracionária ainda não provoca a construção de significados para os alunos, pois muitas pesquisas ainda se dedicam a identificar e mostrar suas dificuldades. Por outro lado, são poucas as que questionam o que e como se ensina esse conteúdo. Nesse sentido, o estudo das três dimensões didáticas dos números fracionários baseado na TAD permite que se aprofunde exatamente na questão do ensino.

O estudo da dimensão epistemológica nos permitiu identificar que os números fracionários são consequência das necessidades de medir, distribuir e comparar grandezas que se constituem em sua razão de ser. De acordo com as sociedades, essas necessidades conduziram ao desenvolvimento de tarefas de medição, tarefas de comparação e tarefas de distribuição que, por sua vez, conduziram ao desenvolvimento de técnicas para seu cumprimento, ou seja, técnicas para medir, distribuir e comparar, que certamente conduziram à divisão de alguma unidade de medida ou objeto para que se encontrasse um resultado. Mas essas técnicas só puderam ser desenvolvidas com a criação de registros para seus resultados, e de regras para possíveis cálculos que conduziram à busca da representação fracionária e valores desconhecidos. A necessidade de ensino conduziu então ao desenvolvimento de concepções, para justificar, de certa forma, essas técnicas. Essas constatações nos conduziram a desenvolver um MER composto por três modelos secundários para estudar a conceituação de números racionais, entendendo que devemos conduzir os alunos a construírem conhecimentos de medida, de distribuição e de comparação apoiados nas concepções de medida, de quociente e de razão a partir de situações em que podem relacioná-las, além de utilizar as concepções parte-todo e operador.

O estudo da dimensão econômico-institucional nos mostrou que as praxeologias relacionadas aos números fracionários na escola de ensino fundamental ainda apresentam resquícios do início do século XX, priorizando o ensino a partir da noção parte-todo, focando no bloco saber-fazer, com o excesso do ensino de regras operatórias. Nesse sentido, não temos efetivamente uma praxeologia pela falta de um discurso tecnológico teórico, que poderia ser feito a partir das concepções construídas com a ajuda de situações que mobilizassem conhecimentos de medição, distribuição e comparação. O modelo dominante ainda é o da concepção parte-todo, com vida própria que conduz à não construção de qualquer significado aos números fracionários pelos alunos.

O estudo da dimensão ecológica mostra que, diferentemente do que ocorria nos séculos anteriores, agora a grandeza é o próprio número, ou seja, o número não é visto como consequência da escolha de uma unidade de medida e, por isso, vemos, por exemplo que a área é $5cm^2$, o que inviabiliza a percepção de que a mesma área poderia ser representada por números diferentes que dependem diretamente da escolha da unidade de medida. Tal falta de percepção pode ser resultado do trabalho com números fracionários a partir da concepção parte-todo, como a utilização da expressão “partes iguais” em figuras planas, por exemplo, desvia o olhar da grandeza área e focaliza na congruência de figuras. Tal fato conduz a não se considerar a mesma fração para representar partes de figuras de mesma área de formas diferentes.

Neste estudo, percebemos que os números fracionários racionais existem, no sistema de ensino, apenas para que se possa avançar no estudo de outros conteúdos. Em particular, eles vivem para permitir o ensino de proporcionalidade, principalmente em sua representação algébrica. Por isso, também, é que se privilegiam as técnicas, em detrimento de qualquer discurso tecnológico teórico.

Entendemos que as competências e habilidades relacionadas com os temas de números e álgebra com relação aos números fracionários poderiam ser associadas ao desenvolvimento de praxeologias, a partir de nosso MER e do modelo alternativo que construímos. Uma restrição que dificulta e/ou impede o trabalho com praxeologias plenas (que apresentem discursos tecnológicos-teóricos) é o professor desenhar tarefas que permitam alcançar essas competências e habilidades, considerando as razões de ser desses números.

Assim, temos que olhar mais profundamente para o que se ensina e como se ensina do que para as dificuldades que os alunos apresentam, porque estas, com certeza, são consequências do ensino.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, PR: Editora da UFPR, 2010.

ALMOULOUD, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **UNIÓN**, n. 42, p.9-34, 2015

BARBOSA, A. A. e MAGALHAES, M. G. S. D. A concepção de infância na visão Philippe Ariès e sua relação com as políticas públicas para a infância. **Examãpaku**, v.1, n.1, p.1-8, 2008.

BARQUERO, B. F. BOSCH, M. e GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 1, p.1-28, 2013.

BEZOUT, E. Arithmétique de Bezout, à l´usage de la marine et de l´artillerie. Treizième édition, Chez L. Tenré, Libraire. 1848. Disponível em: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62125113.r=Arithm%C3%A9tique%20Bezout?rk=21459;2.

BOSCH, M. e CHEVALLARD, Y.. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n.1, p.77-124, 1999.

BOSCH, M., FONSECA, C. e GASCON, J. Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, v.24, n.2.3, p.205-250, 2004.

BOURDON, M. **Éléments D'Algebre**. 19ª Edição, Revista por M. E. Prouhet. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 655 p, 1897

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 3ª reimpressão. Tradução: Elza Gomide. Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Educação é a base – BNCC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, v.4.2, p. 164-198, 1983.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 12.1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. Familière et problématique, la figure du professeur. **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, France : La Pensée Sauvage Éditions. v.17.3, p. 17-54, 1997. In: La fonction professorale (free.fr)

CHEVALLARD, Y. L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, France: La Pensée Sauvage-Éditions. v. 19.2, p.221-265, 1999.

CHEVALLARD, Y. Les TPE comme problème didactique. In: Seminário Nacional de Didática Matemática, 2001. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14.

CHEVALLARD, Y. Organiser l´étude 1. Structures & Fonctions. In: Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. *France*: La Pensée Sauvage, p. 3-32, 2002a.

CHEVALLARD, Y. Organiser l´étude. 3. Écologie & régulation. *Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France*: La Pensée Sauvage. p. 41-55, 2002b.

CHEVALLARD, Y. Enseñar matempatica em la Sociedad del Mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. **REDIMAT**, Journal of Research in Mathematics Education, v2, n. 2, p. 161-18, 2013.

DIAS, M. L. S. **Mapeamento das pesquisas produzidas em São Paulo acerca de números fracionários, entre os anos de 2000 e 2016**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2018.

DOUADY, R. Jeux de cadre et dialectique outil-objet. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions, v. 7.2, p.5-31, 1986.

DUVAL, R. **Semiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang, 1995.

FLORES, M. V. e BISOGNIN, V. Os significados dos números racionais: um olhar a partir do libro didático. **Vidya**, v.40, n.1, p. 29-43, 2020.

GASCÓN, J. Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T. (Editor): In: Actas del III Simposio de la SEIEM, Valladolid, p. 129-150, 1999.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, *RELIME,* v.14, n.2, p. 203-231, 2011.

GACÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, número especial, XXV aniversario, p. 143-167, 2014.

LANDIM, E. e MORAIS, M. D. Análise praxeológica da abordagem de frações em um libro didático do 4º ano do ensino fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v.21, n.5, p. 555-565, 2019.

LESSA, V. E. **A compreensão do conceito de número fracionário: uma sequência didática para o significado medida**. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014.

LUCAS, C., BON, C. F., GASCÓN, J. e CASAS, J. O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. **Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 50, 2014.

MINEIRO, R. M. Estudo das três dimensões do problema didático de inequações. Tese de doutorado. São Paulo, PUC-SP, 2019.

NEYRET, R. Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants: nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maitres. Tese de doutorado. Grenoble: Université Joseph Fourier – Grenoble 1, 1995

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. Editora Livraria da Física. (Coleção história da matemática para professores), 2015.

SILVA, M. J. F. **Sobre a introdução do conceito de Número fracionário.** Dissertação de mestrado. São Paulo: PUC-SP, 1997. Disponível em:

https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11516/2/Maria%20Jose%20Ferreira%20da%20Silva.pdf

SILVA, M. J. F. Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. Tese de doutorado. São Paulo: PUC-SP, 2005.

VALENTE, V. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume Editora, FAPESP, 2.ed. 2002.

VALENTE, V. R. **O Nascimento da Matemática do Ginásio.** São Paulo: Annablume Editora, FAPESP, 2004.