OS INFINITÉSIMOS: PANORAMA HISTÓRICO E POSSIBILIDADES NO ENSINO

THE INFINITESIMS: HISTORIC OVERVIEW AND POSSIBILITIES IN TEACHING

Bárbara Cristina Pasa[1]

Daniele Binotto[2]

Méricles Thadeu Moretti[3]

Resumo

Os infinitésimos permearam a construção de diversos conceitos matemáticos, sobretudo os relacionados ao Cálculo. Porém, a história da Matemática revela os inúmeros percalços envolvendo as inconsistências matemáticas relacionadas a este conceito, da utilização intuitiva para compreensão de fenômenos até a exclusão total na matemática. Este artigo apresenta o cenário histórico que permeou a utilização e as tentativas de legitimação dos infinitésimos, da sua exclusão pelos matemáticos até a construção de uma teoria que lhes deu rigor, formalidade e validação matemática. Além disso, são abordadas ideias a respeito do ensino de conceitos de Cálculo por meio da noção de infinitésimo no âmbito do ensino superior, bem como uma possibilidade de compreensão das taxas de variação de funções no ensino médio. A metodologia de coleta dos dados apresentados baseou-se em investigação bibliográfica em diferentes fontes científicas. Conhecer e compreender a história da construção de conceitos matemáticos permite um olhar não hermético ao ensino e às possibilidades pedagógicas. Ancorar o ensino de Cálculo nos infinitésimos permite uma aproximação da construção histórica do conceito, ser mais instigante e intuitivo aos estudantes. Ademais, ressalta-se a noção de infinitésimos no trabalho com ensino médio como uma oportunidade para compreender e esboçar curvas.

Palavras-Chave: História da Matemática; Noção de infinitésimos; Taxa de variação instantânea; Esboço de curvas; Ensino médio.

Abstract

The infinitesimals permeated the construction of several mathematical concepts, especially those related to Calculus. However, the history of Mathematics reveals the countless difficulties involving the mathematical inconsistencies related to this concept, from the intuitive use for understanding phenomena to the total exclusion in mathematics. This article presents the historical scenario that permeated the use and attempts to legitimize infinitesimals, from their exclusion by mathematicians to the construction of a theory that gave them rigor, formality and mathematical validation. In addition, ideas about teaching Calculus concepts through the notion of infinitesimal in the context of higher education are discussed, as well as a possibility of understanding the rates of variation of functions in high school. The methodology for collecting the data presented was based on bibliographic research from different scientific sources. Knowing and understanding the history of the construction of mathematical concepts allows a non-hermetic look at teaching and pedagogical possibilities. Anchoring the teaching of Calculus in infinitesimals allows an approximation of the historical construction of the concept, to be more exciting and intuitive for students.

[1] Doutora: Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS. bapasa1@hotmail.com

[2] Estudante Bolsista: Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS. danieli.binotto@outlook.com

[3] Doutor: Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. mthmoretti@gmail.com

Furthermore, the notion of infinitesimals in working with high school is highlighted as an opportunity to understand and sketch curves.

Keywords: History of Mathematics; Notion of infinitesimals; Instantaneous rate of change; Sketching curves; High school.

Introdução

A construção dos conhecimentos matemáticos, mais precisamente do Cálculo, embasada nos infinitésimos foi considerada inconsistente durante muito tempo aos olhos dos matemáticos. Isto, porque faltava uma explicação sólida e plausível matematicamente sobre seu conceito. A ideia de infinitésimo, como uma grandeza muito próxima de zero, de forma que às vezes pode ser desprezada, mas ao mesmo tempo, diferente de zero, de forma que possa ser dividida por ela mesma quando for conveniente, foi a grande contradição relacionada a este conceito. Todas as tentativas no sentido de formalização desta ideia foram, por muito tempo, permeadas por dificuldades lógicas, sendo, assim, contestadas.

Essas inconsistências fizeram com que, em fins do século passado, a concepção discreta-numérica levasse vantagem no debate matemático relacionado ao desenvolvimento e compreensão do Cálculo, ocasionando a utilização única da construção rigorosa e formal, via limites. Apesar disso, as ideias infinitesimais sempre estiveram presentes em construções em outras áreas do conhecimento, como na Engenharia e na Física. A formalização dos infinitésimos viria muito tempo depois com a apresentação de uma nova teoria para a análise matemática por Abraham Robinson (1918-1974), baseada nos infinitésimos e com o uso da teoria de modelos.

Com a legitimação na Matemática, os infintésimos passaram a fazer parte também das possibilidades no ensino de disciplinas relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral. De acordo com os autores Rêgo (2000), Milani (2004) e Cabral e Baldino (2006), a utilização dos infinitésimos no ensino de Cálculo é mais intuitiva que a via limites. Além disso, as concepções espontâneas sobre infinitésimos (MILANI, 2004) permitem, a partir de um ensino organizado, a elaboração de conjecturas relativas à derivada que podem interessar muito em compreensões no âmbito do ensino médio (PASA, 2017).

A partir dessas premissas, apresentamos ideias coletadas em pesquisa exploratória, parte da tese de doutorado de Pasa (2017). Os objetivos da tese perpassaram a construção de um caminho alternativo para o esboço de curvas ancorado nos infinitésimos e reflexões sobre questões que envolvem a aprendizagem nesta perspectiva. A tese envolveu pesquisa exploratória sobre o tema, construção de uma possibilidade de trabalho no ensino médio e a aplicação de uma sequância didática aos estudantes do terceiro ano do ensino médio organizada de acordo com a Engenharia Didática de Michèle Artigue (1996). O material coletado na sequência didática e analisado foi constituído pelas construções de esboço de curvas realizadas pelos estudantes a partir dos quais pode-se concluir a respeito da aprendizagem com base nos gestos intelectuais (DUVAL, 2011) dos estudantes. A construção da proposta de trabalho e as análises realizadas embasaram-se na teoria cognitiva de Duval no que tange às operações congnitivas necessárias para a aprendizagem bem como às funções dos discursos (DUVAL, 2004) mobilizadas e requeridas nas resoluções dos estudantes.

Neste artigo, no entanto, expomos parte desta tese relativa ao panorama histórico dos infintésimos na construção dos conceitos do Cálculo e à base teórica sobre o ensino a partir dessa noção, a qual ancorou a construção do caminho alternativo (PASA, 2017) no âmbito do ensino médio. Este caminho alternativo para esboçar curvas utiliza a noção de infinitésimos para calcular as taxas de variação da função e utilizá-las para concluir sobre o esboço. Por isso, foi necessário compreender ampla e profundamente o conceito de função relacionada ao dinamismo inerente a este objeto matemático.

Este artigo, pauta-se, portanto, na história da construção dos conceitos matemáticos e nas pesquisas que demonstram que a noção de infinitésimos é espontânea aos estudantes. Os dados e informações apresentados foram coletados na parte inicial da pesquisa realizada na tese e a metodologia utilizada para tal foi baseada em investigações bibliográficas e pesquisa exploratória em diferentes fontes científicas.

Isto posto, inicialmente apresentamos aspectos relevantes historicamente sobre a construção dos conhecimentos relativos ao Cálculo e o papel dos infinitésimos neste cenário. Na sequência, expomos o que pesquisas abordam sobre o ensino de Cálculo pautado nas ideias intuitivas sobre infinitésimos. Por fim, apontamos na direção do caminho alternativo (PASA, 2017) a fim de esboçar curvas de funções ancorado na noção de infinitésimos.

O papel dos infinitésimos na construção do conhecimento matemático

Os infinitésimos, apesar de inconsistentes aos olhos dos matemáticos, ao longo de séculos possibilitaram o desenvolvimento das ideias relacionadas ao entendimento do movimento e da variação de funções, conceitos estes que embasam o Cálculo. O final do século XVII é considerado o marco da invenção do Cálculo com os resultados de pesquisas de Isaac Newton e Gottfried Wilhem Leibniz. Porém, as sementes destas descobertas foram lançadas muito antes, ainda na Grécia do século V a.C.. A invenção do Cálculo foi tão significativa para a Matemática que a possibilitou, de acordo com Eves (2004, p. 417), "passar para um plano superior", dando fim à matemática elementar.

As atividades humanas exigem conhecimentos completos de tudo que as envolve, por isso, além de conhecer os fenômenos, é imprescindível compreendê-los de todas as formas possíveis, suas razões e ligações com outros fenômenos. Corroborando Caraça (1951), "a inteligibilidade do universo, considerando o termo universo no seu significado mais geral – mundo cósmico e mundo social – é, por consequência, uma condição necessária da vida humana" (p. 64). Desta forma, desde há muito tempo, o homem realiza esforços neste sentido.

Os esboços científicos sobre a inteligibilidade do universo surgiram há milênios a partir de observações da natureza e esforços de reflexão por parte do homem em momentos específicos, cujas condições possibilitaram viver e pensar sobre as coisas. Estes momentos só apareceram pela primeira vez na história humana nas colônias gregas entre os séculos VII e VI a.C., com o surgimento do comércio e da necessidade de viajar e ter contatos com outros povos. Duas foram as questões fundamentais como ponto de partida para a produção científica de um modo geral e, mais especificamente, do Cálculo: a primeira relacionada à possibilidade de existir um princípio único ao qual toda a diversidade do universo se reduz; e a segunda relacionada à estrutura e criação do universo e movimento dos astros (CARAÇA, 1951).

Para a primeira questão, várias foram as tentativas de respostas de distintos povos e, dentre elas, a da escola pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos, filósofo que viveu entre 580 e 504 a.C., a qual creditou o motivo essencial da explicação racional das coisas no número e na harmonia. Para os filósofos desta escola, a compreensão do universo consistia no estabelecimento de relações entre números e de leis matemáticas relativas à ordenação matemática do Cosmos, as quais traduzem a harmonia universal. Para legitimar sua teoria, os pitagóricos apresentaram diversas justificativas, entre elas, o conhecido teorema de Pitágoras da Geometria. Contudo, da afirmação da existência de uma ordenação matemática do Cosmos fez-se outra afirmação, grave e difícil de verificar: as coisas são números, e, para comprovar essa ideia, os pitagóricos procuraram uma estrutura da matéria idêntica à estrutura numérica, o que resultou na afirmação de que:

> a matéria era formada por corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais, reunidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos; cada um de tais corpúsculos – mônadas – era assimilado a unidade numérica e, assim, os corpos se formavam por quantidade e arranjo de mônadas como os números se formavam por quantidade e arranjo de unidades (CARAÇA, 1951, p. 72-73).

A afirmação da citação, baseada numa noção primitiva de infinitésimos, porém, foi considerada a essência do lado negativo das ideias pitagóricas uma vez que, quando a realidade não se mostrava de acordo com as propriedades numéricas, eram realizadas torções forçadas. Ou seja, o lado negativo das respostas pitagóricas é formado por tudo que se atribui aos números fora da sua propriedade fundamental de traduzir relações de quantidade (CARAÇA, 1951).

Além disso, o lado positivo das ideias desta escola, representado pelo teorema de Pitágoras, foi utilizado por alguns pensadores para desmentir as conjecturas desta mesma escola. Através de tentativas de encontrar a razão dos comprimentos de dois segmentos de retas, mais precisamente da hipotenusa e de um cateto do triângulo retângulo, comprovou-se a incomensurabilidade de segmentos e, assim, colocou-se por terra a teoria das mônadas.

Nesse período histórico, questões relacionadas com a divisão de grandezas impulsionaram a criação de escolas preocupadas com o seguinte raciocínio: “É válido admitir-se que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente ou que é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis?”. Em 450 a.C., o filósofo Zenão de Eléia, um dos mais críticos das ideias pitagóricas relacionadas às mônadas, evidenciou dificuldades lógicas contidas nesta questão através de seus paradoxos, os quais tiveram grande importância no desenvolvimento da Matemática por evidenciar a primeira grande crise da História da Matemática no século V a.C.. Sua crítica tinha como objetivo principal “mostrar que a teoria pitagórica das mônadas, que aspirava ser a matriz duma interpretação geral do universo era inadequada a tal fim e era uma fonte de incapacidades e contradições” (CARAÇA, 1951, p. 213).

Todas essas ideias e contradições de alguma forma estavam relacionadas com o entendimento do movimento e, sobre isto, Zenão foi enfático ao afirmar que "não se trata de saber se há ou não há movimento no mundo, mas de saber se ele é compreensível, isto é, compatível com a explicação racional que damos do Universo" (CARAÇA, 1951, p. 78). Os argumentos utilizados por Zenão proporcionaram uma análise sobre as dificuldades do fenômeno da incomensurabilidade que envolve o infinito e os infinitésimos (movimento) e provaram que a afirmação da Escola Pitagórica, de que todas as coisas tem um número (organização matemática do Cosmos), era inconsistente em face à teoria das mônadas e que esta não fornecia base suficiente para a compreensão do movimento.

Desses argumentos, resultou que, sendo o movimento, uma sucessão de estados de um móvel, ele também era incompreensível, sendo esta sucessão finita ou infinita. E, assim, Zenão ficou marcado na história da Ciência, ao mostrar que o movimento não podia ser compreendido como uma sucessão de estados particulares, uma vez que, ao ser considerado desta forma, equivalia abordá-lo pelo método estático, o que é incompreensível e paradoxal. Ou seja, no cenário científico construído até então, as ideias relacionadas aos infinitésimos, as quais, mesmo que de forma implícita, estavam relacionadas à ideia de "contínuo" nos problemas sobre o movimento, foram colocadas por terra pela escola eleática, a partir dos argumentos de Zenão.

Nesse momento da história da ciência e da crise da compreensão do movimento, ou se renunciava à compreensão do movimento, ou se procurava obter uma teoria quantitativa, da qual resultassem métodos de cálculo que permitissem fazer previsões (CARAÇA, 1951). Várias foram as tentativas neste sentido. Em 370 a.C., em uma destas tentativas de resposta aos paradoxos de Zenão, os infinitésimos ressurgiram no Método da Exaustão, creditado a Eudoxo, como forma de resolver questões relacionadas ao cálculo de área, volume e comprimento de arcos. Este método

> admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie (EVES, 2004, p. 419).

O método apresentado na citação foi muito utilizado por Arquimedes, um século depois de Eudoxo, em sua obra *O Método*, considerada uma antecipação das ideias de limites, diferenciais e integrais, que seriam desenvolvidas no final do século XVII (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006). Após tantas críticas e tentativas de resolver os impasses relacionados ao movimento e, sobretudo devido a aspectos relacionados às novas atividades do homem da Grécia Antiga, em que o foco do pensamento se voltou aos interesses do imperialismo de Atenas, os problemas anteriormente levantados continuaram a ser debatidos, porém, não foram solucionados e, neste aspecto, ocorreu uma hibernação, por longos anos, das ideias relacionadas ao movimento, devido às incoerências relacionadas à noção de infinitésimo. Durante este tempo, ocorreu uma cristalização de ideias relacionadas à crítica de Zenão: a incapacidade numérica para resolver os problemas da incomensurabilidade, a exclusão do conceito quantitativo de infinito e o abandono das concepções dinâmicas (movimento).

Séculos XVI e XVII

Após a crise sobre a compreensão do movimento, a "mentalidade grega encerrou-se numa atitude finitista" (CARAÇA, 1951, p. 216), numa concepção de universo "finito, geocêntrico, formado por uma sucessão de esferas centradas na Terra, esferas nas quais todos os astros se deslocavam em movimentos circulares" (CARAÇA, 1951, p. 216), a qual perdurou por longo tempo. O ano de 1453 é considerado o início da ciência moderna a partir da obra de Copérnico (1473-1543) sobre o movimento dos corpos celestes. Como cada época tem seus problemas dominantes, a partir do século XVI, um dos problemas que tornou necessário pensar na criação de uma teoria quantitativa para o movimento, está relacionado com o estudo dos movimentos dos astros, com fins de navegação. E, assim, os problemas relacionados ao movimento foram retomados. Johannes Kepler foi quem comprovou, contrariamente à ideia geocêntrica de mundo, em 1609, a sua 1ª Lei, na qual afirma que as órbitas planetárias são elipses das quais o Sol ocupa um dos focos. Assim, o círculo deixa de fazer parte da concepção de universo e diversas dúvidas voltam a assolar os pensadores da época, principalmente relacionadas à causa física do movimento.

Para refletir sobre essas dúvidas, tiveram que ser deixados de lado diversos preconceitos que pudessem supor a explicação da natureza íntima do movimento dentro de quadros racionais prefixados (CARAÇA, 1951). Assim, ainda como forma de resolver a questão levantada por Zenão séculos antes, sobre a natureza do movimento, foi necessário compreender que não é possível tomar cada ponto isolado dos outros. O entendimento do que se passa em cada instante perpassa a “interdependência com o que se passa em instantes e pontos que o precedem e seguem” (CARAÇA, 1951, p. 218), sendo que entre dois pontos há uma infinidade de possibilidades que fazem parte da interdependência. Ou seja, existe uma infinidade de estados possíveis entre dois estados quaisquer.

A partir deste entendimento, para desenvolver um raciocínio que permitisse a compreensão do movimento, não seria possível trabalhar com números, mas deveria ser possível representar qualquer dos números, surgindo assim, o instrumento matemático: a variável (CARAÇA, 1951). Esta variável deveria ter no seu domínio números arbitrariamente pequenos em módulo, surgindo, assim, de forma explícita, o conceito de infinitésimo. A ideia de infinitésimo, como uma grandeza muito próxima de zero, de forma que às vezes pode ser desprezada; mas ao mesmo tempo, diferente de zero, de forma que podemos dividir por ela mesma quando for conveniente, era a grande contradição relacionada a este conceito e que só foi parcialmente solucionada um século e meio depois.

Um dos primeiros europeus a desenvolver ideias relativas aos infinitésimos foi Johannes Kepler, com objetivo de calcular áreas envolvidas em sua 2ª Lei do movimento planetário e volumes envolvidos em seu trabalho sobre a capacidade de barris de vinho (EVES, 2004). Contudo, estes números indefinidamente pequenos, os infinitésimos, continuaram sendo foco de questões conflitantes nos domínios da Matemática, da Física, da Lógica e da Filosofia, devido às aparentes inconsistências e contradições da concepção de magnitudes infinitesimais e de magnitudes infinitas (CARVALHO, D’OTTAVIANO, 2006).

Foi neste período que os infinitésimos ganharam espaço e integraram a Matemática mais efetivamente nos trabalhos de matemáticos como Bonaventura Cavallieri (1598-1647), Kepler (1571-1630), Galileu Galilei (1564-1642) e Evangelista Torricelli (1608-1647), os quais aplicaram o método infinitesimal à Física e à Matemática. Galileu utilizou as propriedades dos infinitésimos no estudo de problemas da mecânica e da dinâmica, sugerindo a “existência de objetos compostos por partículas minúsculas de dimensões infinitesimais, unidas entre si por uma infinidade de pequenos vazios” (CARVALHO, D’OTTAVIANO, 2006, p. 17). Cavalieri (1598-1647) utilizou o método da exaustão mesclado com o método infinitesimal de Kepler para o cálculo geométrico de áreas e volumes. A diferenciação teve origem em problemas de retas tangentes e de máximos e mínimos de funções. Os primeiros sinais do método diferencial se encontram nas ideias de Fermat, em 1629, o qual utilizou a ideia de Kepler sobre os incrementos infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo (EVES, 2004).

Até esse momento da história, o desenvolvimento do Cálculo já havia avançado de forma considerável e ainda era embasado na noção, mesmo que inconsistente matematicamente, de infinitésimos. Muitas integrações tinham sido feitas e o processo de diferenciação havia aflorado, possibilitando a construção de inúmeras retas tangentes. Além disso, a ideia de limite também já havia sido concebida. O que faltava era a "criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais" (EVES, 2004, p. 435). E foi neste aspecto que Newton e Leibniz, trabalhando independentes, deram sua contribuição.

Newton (1642-1726)

Isaac Newton nasceu na Inglaterra e suas primeiras construções, em 1665, estavam relacionadas a representar funções por meio de séries infinitas e ao cálculo de taxas de variação (fluxo) de quantidades variáveis continuamente (fluentes). Combinando esses dois problemas, Newton criou seu Cálculo - Método dos Fluxos (BOYER, 2010). Entre os anos de 1665 e 1666, Newton fez suas principais descobertas: o teorema binomial, o Cálculo (método dos fluxos), a lei da gravitação e a natureza das cores (BOYER, 2010). Porém, ataques às primeiras publicações de Newton sobre a teoria das cores fizeram com que suas descobertas no campo do Cálculo fossem divulgadas somente muito mais tarde. Este fato teve desdobramentos importantes na história da Matemática, principalmente com relação à polêmica que envolveria Leibniz, tempos mais tarde, sobre a prioridade de criação do Cálculo (EVES, 2004).

Uma das publicações de Newton, o *Method of Fluxions*, escrito em 1671 e publicado somente em 1736, baseava-se na ideia de que uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Nela, Newton demonstrava preocupação com dois aspectos relacionados a fluentes e fluxos: um envolvendo diferenciação, ao estabelecer relações envolvendo os fluentes e seus fluxos a partir de uma relação entre fluentes; e outro relacionado a encontrar uma relação entre os fluentes conhecendo uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, ou seja, o problema inverso que equivale a resolver uma equação diferencial.

Neste trabalho, Newton utilizou as quantidades infinitesimais trabalhadas cinematicamente de "tal modo que as variações infinitesimais da variável tempo tornam-se parte do processo que gera magnitudes geométricas" (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006, p. 19). Ou seja, Newton tentou dar consistência lógica e formal ao seu cálculo infinitesimal a partir de intuições geométricas conjugadas com elementos algébricos e com o objetivo de possibilitar um suporte matemático à construção de um sistema natural baseado em leis naturais universais (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006). Para tanto utilizou e aperfeiçoou o conceito cinemático de infinitésimos desenvolvido por Barrow e Fermat, chamado de momentary increments (momentos). Porém, por se tratarem de quantidades ao mesmo tempo não finitas e não nulas, não conseguiu evitar as inconsistências.

Leibniz – (1646-1716)

Considerado o grande rival de Newton na invenção do Cálculo, Gottfried Leibniz nasceu na Alemanha e iniciou seus estudos ainda muito jovem. Com 12 anos de idade já dominava todo o conhecimento da época sobre Matemática, Filosofia, Teologia e Leis. Aliás, foi o aprofundamento deste último que permitiu que Leibniz se engajasse no serviço diplomático, o qual lhe proporcionou tempo para se dedicar aos seus estudos prediletos, relacionados à Matemática. Em 1672, em missão diplomática em Paris, Leibniz conheceu Huygens, com quem teve aulas de Matemática. Em 1673, em uma missão política a Londres, tornou-se membro da Royal Society, mesmo ainda iniciando seu aprofundamento na Matemática. Segundo Boyer (2010) foi entre esta missão e a visita a Londres, em 1676, que seu cálculo diferencial tomou forma. Foi nesta época que Leibniz descobrira o teorema fundamental do cálculo, chegando à mesma conclusão que Newton chegara vários anos antes: como sendo um método importante pela sua generalidade. Além disso, desenvolveu notações sobre o assunto e estabeleceu muitas fórmulas de diferenciação (EVES, 2004), sempre com uma percepção acentuada da importância das notações como ajuda ao pensamento (BOYER, 2010).

Leibniz, assim como Newton, tentou encontrar um modo de quantificar fenômenos que variam uniformemente com o tempo, porém seus objetivos eram outros. Em sua primeira exposição publicada em 1684, Leibniz formaliza o Cálculo diferencial e expõe as fórmulas para produtos, quocientes e potências com aplicações geométricas. Nesta obra, Leibniz utiliza os infinitésimos como “instrumentos úteis”, embora “ficcionais” e introduz, sob a notação dx, a noção de diferencial para designar uma “quantidade infinitamente pequena” de uma variável x. Além disso, as diferenciais são tratadas como segmentos, dos quais são obtidos os quocientes diferenciais $\frac{dy}{dx}$, sendo a nomenclatura utilizada distinta da utilizada por Newton, mas com conceitos correspondentes (CARVALHO, D’OTTAVIANO, 2006).

Em outro trabalho, apresenta fórmulas utilizadas atualmente como $d(xy) = xdy + ydx$ e $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Nessas obtenções, os termos como $dxdy$ são “negligenciados” por serem infinitesimais. Leibniz foi o primeiro a utilizar o $\int$ como símbolo da integral indicando uma soma de indivisíveis e símbolos de diferenciais e derivadas que utilizamos até hoje em livros sobre o assunto.

O fim temporário dos infinitésimos na Matemática

As concepções de infinitésimos que Newton e Leibniz introduziram são distintas. Para Leibniz, os infinitésimos estão fortemente associados com a lógica e a metafísica, enquanto que para Newton são fortemente motivadas pela física e fenômenos naturais (CARVALHO, D’OTTAVIANO, 2006). Desde as descobertas destes dois pesquisadores, o Cálculo vem se constituindo pela luta entre justificações diferentes: “uma justificação no campo semântico contínuo geométrico, centrada na noção de infinitésimo, e outra no campo semântico discreto-numérico, centrada na noção de limite” (BALDINO, 1995, p. 8). Na época de Leibniz a ideia de infinitésimos predominava. Sendo dx um acréscimo infinitesimal a x do qual resulta um acréscimo infinitesimal, dy, a y. A taxa de variação instantânea de y era o quociente desses infinitésimos.

Contudo, nem todo esforço de Newton e Leibniz no tratamento formal dos infinitésimos foram suficientes para garantir a adequação dos infinitésimos como base segura para a construção do Cálculo. Ainda faltava uma explicação sólida e consistente do conceito de infinitésimos. Sem isso, suas inconsistências fizeram com que, em fins do século passado, a concepção discreta-numérica começasse a levar vantagem no debate matemático, ocasionando, a utilização da construção rigorosa e formal, via limites, para a compreensão do cálculo. A formalização dos infinitésimos viria muito tempo depois.

Diversas foram as discussões sobre essas questões que vieram posteriormente e os debates se estenderam até 1706, terminando somente após uma ação conciliatória de uma comissão especial criada pela Academia de Paris para tal fim. Nesta ação, considerou-se que não havia sido apresentada uma justificativa rigorosa para existência dos infinitésimos (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006).

A partir deste período, os infinitésimos foram banidos das produções matemáticas, permanecendo nos trabalhos de físicos, engenheiros, matemáticos aplicados e cientistas tecnológicos, nos quais o rigor matemático era irrelevante. Na Matemática, porém, a compreensão do Cálculo ficou embasada apenas no rigor e formalização via limites.

O retorno dos infinitésimos na Matemática

O retorno dos infinitésimos na Matemática ocorre com a apresentação de uma nova teoria para a análise matemática por Abraham Robinson (1918-1974), baseada nos infinitésimos e com o uso da teoria de modelos. Um esboço desta teoria foi apresentado em 1960 em um seminário realizado na Universidade de Princeton, Estados Unidos, e depois, em janeiro de 1961, no encontro anual da *Association for Symbolic Logic*, quando é, então, publicada sob o título *Non-Standard Analysis*. De acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), o tratamento dispensado neste trabalho por Robinson às quantidades infinitesimais reflete de forma precisa as ideias originais de Leibniz. Neste trabalho, Robinson

> estabelece um modelo não-standard de ordem superior para a aritmética e um modelo não-standard para a análise, os quais preservam suas operações e propriedades usuais. O primeiro baseia-se numa extensão não standard do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, denotada por $^*\mathbb{N}$, cujos elementos, que incluem números naturais infinitos, são chamados números hipernaturais. O segundo baseia-se numa extensão do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, denotada por $^*\mathbb{R}$, que inclui números reais infinitos e infinitésimos, denominados números hiper-reais (CARVALHO, D'OTTAVIANO, 2006, p. 24-25).

Na perspectiva desta nova teoria, o cálculo infinitesimal pressupõe, como estrutura básica, os números hiper-reais, *R, os quais são constituídos pelos reais, R, acrescido dos infinitésimos ($\varepsilon \in {}^*R$, cujo módulo é menor que todos os reais positivos), dos infinitos ($\Omega \in {}^*R$, cujo módulo é maior que todos os reais positivos) e das mônadas. Sendo que a "mônada de um $x \in R$ é constituída por todos os $y \in {}^*R$ que estão infinitamente próximos de x, ou seja, pelos y tais que $y - x$ é infinitésimo" (BALDINO, 1995, p.11).

Abordagem de ensino por meio dos infinitésimos

Na perspectiva das considerações históricas anteriores, propomos, neste artigo, além de expor a história por trás deste conceito conflitante, apresentar pesquisas que refletem sobre o potencial desta noção no ensino de Cálculo e ainda apontar para uma possibilidade no ensino médio. Os estudos encontrados refletem sobre o ensino de Cálculo com base nos infinitésimos e a pesquisa de Pasa (2017) é a única com foco no ensino médio.

Admitindo que as inconsistências matemáticas relacionadas à noção de infinitésimos estão superadas e que a abordagem via limites, única utilizada no ensino atual, ocasiona dificuldades de aprendizagem, conforme sinalizam Cornu (1983); Giraldo (2004); Giraldo e Carvalho (2002); Tall (1980, 1982) e Tall e Vinner (1981); pesquisadores como Oliveira (1993), Baldino (1998), Rego (2000), Milani (2004), Cabral e Baldino (2006) apostam no ensino de Cálculo via infinitésimos.

De acordo com Carvalho e D'Ottaviano (2006), o uso dos infinitésimos no ensino de Cálculo, "em diversos aspectos, é bem mais natural e instigante" (p. 34). Dentre as vantagens para o estudante de trabalhar com infinitésimos neste nível de ensino, Keisler[4] (1986 apud CARVALHO; D'OTTAVIANO, 2006) da Universidade de Wisconsin, afirma que uma delas é sua maior afinidade com aspectos intuitivos que conduziram à criação do Cálculo e também a possibilidade de tornar mais fácil a compreensão dos conceitos de derivada e integral.

Grande defensor de concepções infinitesimais no ensino de Cálculo, principalmente para não matemáticos, Roberto Baldino tem diversos trabalhos publicados em que questiona principalmente a demasiada ênfase dada às demonstrações e rigor no ensino de Cálculo. Segundo Cabral e Baldino (2006), os professores sabem das dificuldades dos estudantes na aprendizagem do Cálculo e, na tentativa de tornar o conteúdo acessível dedicam bastante tempo das aulas à teoria e às abstrações. Contudo, de acordo com David Tall (1980, 1982, 2012), pesquisador do desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático avançado, a falta de domínio do pensamento matemático avançado justifica a dificuldade do estudante em abstrair os conceitos matemáticos. Desta forma, torna-se necessário abordar os conceitos de forma mais intuitiva para o aluno e modificar o

---

[4] KEISLER, H. J. Elementary Calculus: an infinitesimal approach. 2nd ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1986.

enfoque dado à disciplina. Cabral e Baldino (2006) mostraram, por meio de uma análise crítica do ensino de Cálculo em cursos de Engenharia, que os infinitésimos fazem parte das concepções espontâneas dos estudantes e que o ensino via limite cria dificuldades e exclusão.

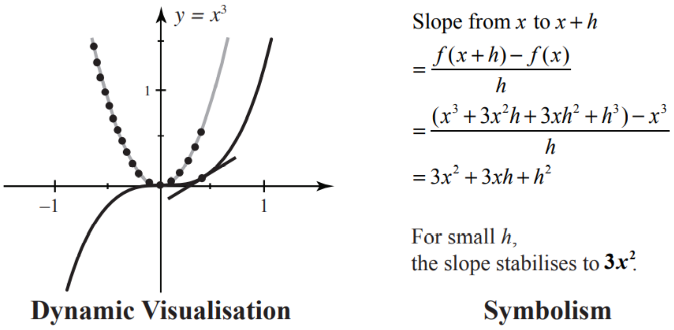
Em trabalho intitulado *A Sensible approach to the Calculus*, Tall (2012) propõe uma abordagem para estudo do Cálculo ancorado na evidência dos sentidos humanos e usando esses insights como uma base significativa para desenvolvimentos posteriores. Sua abordagem não é necessariamente baseada em conceitos conhecidos, mas propõe que ideias fundamentais do Cálculo sejam desenvolvidas naturalmente numa sequência que faça sentido para o aluno para fins gerais e também para apoiar intuições em aplicações e fornecendo um significado ao conceito de limite e/ou de infinitesimais, posteriormente.

De acordo com este autor (2012), o desenvolvimento do pensamento matemático pode ser categorizado em três "mundos". O primeiro mundo se desenvolve a partir de nossas percepções naturais e ações humanas, construindo imagens mentais que são verbalizadas de maneiras cada vez mais sofisticadas e se tornam entidades mentais perfeitas em nossa imaginação. O segundo, nomeado de mundo simbólico *proceptual*, é o mundo dos símbolos que usamos para cálculos e manipulação em aritmética, álgebra, cálculo etc. e perpassa as ações que realizamos e traduzimos em computação e manipulação simbólicas. O terceiro mundo, axiomático formal, evolui no âmbito das formulações de definições lógicas e desenvolvimento de estruturas de prova formal.

Segundo Tall (2012), os gráficos e a noção de inclinação habitam o mundo corporificado de objetos e suas propriedades (primeiro mundo) e, diante disso, a fim de compreender essas noções, sugere um trabalho em termos do que o autor chama de continuidade natural e retidão local. Nesta proposta, a base para desenvolver o Cálculo é a maneira como nós, humanos, pensamos naturalmente sobre as ideias. Em particular, considera como nos desenvolvemos por meio de nossas percepções, operações e uso da linguagem para formular ideias cada vez mais sofisticadas.

Nesta perspectiva, o entendimento da inclinação de uma curva se dá a partir da ideia de retidão local a qual acontece, inicialmente, por meio da observação de uma pequena parte do gráfico, percebendo como a inclinação da curva muda suavemente ao longo de seu comprimento. Posteriormente, utilizando a tecnologia de um software traça-se os dados numéricos e calcula-se a inclinação em pontos específicos. Assim, sua proposta se ancora na utilização simultânea da visualização dinâmica proporcionada por um software e da operação simbólica para que o aluno compreenda a ideia de retidão local, relacionada com a inclinação da curva. Um exemplo desta correspondência entre visualização dinâmica e simbolismo está apresentada na figura 1, em que o autor encontra a inclinação da curva da função $y = x^3$ a partir a ideia de $\frac{dy}{dx}$ como um quociente das componentes do vetor tangente.

Figura 1: Estudo da inclinação de uma curva a partir da visualização dinâmica e simbolismo.



Fonte: Tall (2012, p. 13)

Com base nas ideias destes autores, deixando as formalizações no âmbito do ensino superior, mais precisamente nos cursos de Análise, sinalizamos um trabalho no ensino médio a fim de compreender e esboçar curvas com potencial para desenvolver o pensamento variacional a partir das percepções e das concepções espontâneas dos estudantes.

A noção de infinitésimo no esboço de uma curva

As taxas de variação de uma função e a relação destas com a compreensão e o esboço de curvas, são somente trabalhadas de forma mais aprofundada no ensino superior, especificamente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Atualmente, estes cursos são foco de recorrentes pesquisas (Rezende (2003), Cury (2007), Sarubbi e Soares (2009), Cavasotto (2010), Oliveira e Raad (2012)) devido aos altos índices de reprovações e dificuldades no ensino e na aprendizagem. Para tais dificuldades, os trabalhos de Ávila (2006), Oliveira (2010), André (2008), Pereira (2009), Rezende (2003) e De Souza *et al.* (2013) apontam como solução ou uma possível forma de minimizá-las, o estudo de noções do Cálculo no ensino médio.

Abordar no ensino médio a variabilidade de funções pode contribuir não somente para o estudo de Cálculo no ensino superior, como também para fortalecer e ampliar as compreensões sobre funções no ensino médio, enfatizando características inerentes a elas como o movimento e dinamismo (PASA, 2017), pouco trabalhadas neste nível de ensino. As ideias que perpassam o caminho alternativo de esboço de uma curva não estão embasadas no rigor e formalização das teorias subjacentes aos infinitésimos, mas na noção intuitiva que pode propiciar, de acordo com os autores estudados, a compreensão de variação de funções e, consequentemente, do esboço da curva da função.

Diante disso e ancorados nas ideias dos autores supracitados, Pasa e Moretti (2016) apresentam e Pasa (2017) detalha e aprofunda uma alternativa para encontrar a taxa de variação de uma função enquanto quociente de infinitesimais $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ e, por meio desta, conhecer a variação da função e esboçar sua curva no âmbito do ensino médio. Diante disso, no que tange à compreensão e ao esboço de curvas no âmbito do ensino médio, torna-se significativo considerar e refletir sobre o potencial didático dos infinitésimos, não no sentido de seu rigor e formalização, mas no sentido de construir uma percepção de infinitésimo pertencente ao mundo corporificado de Tall (2012) e que possibilita o entendimento de variação, fundamental no esboço de curvas.

A noção de infinitésimo a que nos referimos está relacionada às concepções espontâneas dos estudantes identificadas por Cornu (1983) como ideias, imagens, processos e palavras que os estudantes tem sobre um conceito e que não são fruto do ensino organizado sobre esse conceito, mas que nascem das percepções (TALL, 2012) que o estudante traz sobre o conceito. No caso dos infinitésimos, são as concepções espontâneas infinitesimais (MILANI, 2004), como exemplo a ideia que "infinitésimos são pontos muito pequenos e desprezíveis" (p. 5).

No trabalho pedagógico realizado do qual foram coletados os dados da tese em que foram extraídas as ideias deste artigo foi estimulado o aparecimento das concepções infinitesimais para que essas fossem legitimadas. No decorrer dos encontros a definição de infinitésimo evocada e apresentada aos estudantes foi: Infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo. E assim, a concepção de infinitésimo como sendo um número tornou-se uma definição para os estudantes, constituindo, assim, parte da imagem conceitual (TALL, VINNER, 1981) de infinitésimo. Conscientes que essa não é a definição formal aceita pela Análise Não-Standard, consideramos que tal definição, construída a partir da percepção dos estudantes sobre infinitésimos faz mais sentido no ensino médio e aceitamos que esta cumpre o papel de definição formal no contexto do trabalho pedagógico.

O caminho alternativo se resume em estudar a variação da função e, a partir dela concluir a respeito do esboço gráfico. Assim, é possível encontrar a taxa de variação instantânea de primeira ordem[5] - $TVI_1(x)$ de uma função, por meio da taxa média de variação da função em um intervalo infinitesimal genérico Δx: $TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

A partir disso, o esboço de curvas perpassa a análise da variabilidade de uma função possibilitada pelo estudo do sinal da taxa de variação instantânea de primeira ($TVI_1(x)$). Esta taxa, por sua vez, permite inferir sobre crescimento e decrescimento da curva, mas em alguns casos de funções polinomiais do terceiro grau, por exemplo, faz-se necessário encontrar a taxa de variação de segunda ordem ($TVI_2(x)$), inferindo sobre a concavidade.

Tomando, por exemplo, uma função polinomial real do segundo grau na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, encontramos a taxa média de variação:

$$TMV = \frac{[a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c] - [ax^2 + bx + c]}{\Delta x}$$

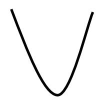
$$TMV = \frac{\Delta x(2ax + a\Delta x + b)}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x + b$$

Considerando Δx um infinitésimo, obtemos a taxa de variação instantânea de primeira ordem: $TVI_1(x) = 2ax + b$. Utilizando o mesmo processo, concluímos que $TVI_2(x) = 2a$. Assim, a partir das taxas de variação ($TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$) da função quadrática, podem ser analisadas importantes variáveis relativas à função em questão, culminando no esboço da curva, apresentadas na tabela 1 a seguir.

Cabe salientar que o relevante na perspectiva do caminho alternativo é a compreensão de propriedades fundamentais relacionadas à variabilidade: crescimento, decrescimento, valor máximo e mínimo, concavidade; propiciada pelas taxas de variação instantâneas da função, interpretadas à luz da noção de infinitésimos e que culminam no esboço da curva da função.

[5] $TVI(x)$ ou $TVI_1(x)$ é a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função, enquanto que a ideia de *variação da taxa de variação instantânea*, ou taxa de variação instantânea de segunda ordem da função é representada por $TVI_2(x)$.

Tabela 1 – Esboço da curva da função $y = ax^2 + bx + c$.

Unidades básicas simbólicas				Unidades básicas gráficas			
TVI_1	**Valor de** a	TVI_1	**Valor de** x	**Reta Tangente**	**Concavidade** (TVI_2)	**Ponto Crítico**	**Esboço curva**
$2ax + b$	$a > 0$	< 0	$x < b/2\,a$	Decrescente	Para cima (positiva)	Mínimo absoluto em $x = -b/2\,a$	
		$= 0$	$x = -b/2\,a$	Constante			
		> 0	$x > -b/2\,a$	Crescente			
	$a < 0$	< 0	$x > -b/2\,a$	Crescente	Para baixo (negativa)	Máximo absoluto em $x = -b/2\,a$	
		$= 0$	$x = -b/2\,a$	Constante			
		> 0	$x < b/2\,a$	Decrescente			

Fonte: Pasa (2017, p. 146)

Considerações finais

O panorama histórico a respeito da noção de infinitésimo demonstra o caráter não linear da ciência, enquanto construção humana permeada de percalços e retrocessos. O pensamento infinitesimal fez parte de todo o processo de construção de conceitos do Cálculo, mas as inconsistências relacionadas a ele fizeram com que fosse criada a estrutura via limites, formal e rigorosa para tal. Esta estrutura foi única no ensino de Cálculo por muito tempo e, de acordo com pesquisas, é motivo de dificuldades de aprendizagem de conceitos importantes.

Atualmente, na Matemática, os infinitésimos são legitimados pela Análise Não-Standard, teoria apresentada em 1960 por Abraham Robinson. Desta forma, torna-se possível, por questões de consistência matemática, utilizar os infinitésimos no ensino a fim de possibilitar desenvolver aspectos intuitivos que conduziram à criação do Cálculo e também de tornar mais fácil a compreensão do conceito de derivada.

No âmbito do ensino médio, a ideia de infinitésimo é relevante enquanto noção intuitiva que permite tirar conclusões importantes sobre a variabilidade de funções. Para tal, são necessários os cálculos da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$, os quais, dependendo da função em questão, podem demandar um alto custo cognitivo algébrico, tornando o trabalho nesta perspectiva desafiador (PASA, 2017). Contudo, de acordo com Pasa (2017), estudar elementos do cálculo no ensino médio, mais precisamente a variabilidade de funções, apesar de desafiador, pode proporcionar uma compreensão efetiva do conceito de função uma vez que trabalha com características inerentes. A noção de infinitésimo utilizada intuitivamente se mostra um recurso interessante e frutífero neste contexto devido ao fato de ela proporcionar uma compreensão intuitiva sobre a variabilidade de funções, favorável ao entendimento de fenômenos no ensino médio.

Referências

ANDRÉ, S.L.C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio.** 2008. 241 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org.). **Didática das Matemáticas**. Instituto Piaget – Coleção Horizontes Pedagógicos, 1996.

ÁVILA, G. Limites e derivadas no ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, nº 60, pp. 30 – 38, 2006.

BALDINO, R. R. Cálculo Infinitesimal: passado ou futuro? **Temas e Debates**, Blumenau, v.8, n.6, p.5-21, 1995.

BALDINO, R. R. **Desenvolvimento de essências de Cálculo Infinitesimal**. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: USP, Edgard Blücher, 3ªed, 2010.

CABRAL. T. C. B; BALDINO, R. R. Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Tipografia Matemática, Lisboa, 1951.

CARVALHO, T. F. de; O'TTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, n. 1, pp. 13-43, São Paulo, 2006.

CAVASOTTO, M. **Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo:** o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. 2010. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

CORNU, B. **Aprentissage de la notion de limite:** conceptions et obstacles. 1983. Tese (Doctorate de Toisieme Cycle de Mathèmatiques Pure) – Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenole, 1983.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DE SOUZA, G.A; NASSER,L.; TORRACA, M.A.A.; ASSEMANY, D.; AZEVEDO, C.A.M. A Transição do Ensino Médio para o Superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba, PR. **Anais [...].** Curitiba, PR, 2013.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos computacionais**: o caso da derivada. Tese de Doutorado. Universidade Ferderal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2004.

GIRALDO, V., CARVALHO, L.M. Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino do Conceito de Derivada. XXIV CNMAC. **Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**, pp. 1 – 10, 2002.

MILANI, R. Limite e Infinitésimos no Cálculo diferencial e Integral. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, Recife, PE. **Anais [...]**, Universidade federal de Pernambuco, Recife, PE, 2004.

OLIVEIRA, T. A. de. **Análise Não-Standard**: uma apologia ao seu ensino. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE/UNESP, 1993.

OLIVEIRA, F. R. **Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio**. 2010. 58 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

OLIVEIRA, M.C.A.; RAAD, M.R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletim GEPEM**. nº 61, pp. 125-137, Jul. / Dez. 2012.

PASA, B. C. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio**: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais. 311 folhas. Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2017. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/187061.

PASA, B.C., MORETTI, M.T. Panorama de pesquisas sobre o esboço de curvas a partir da interpretação global das unidades figurais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, São Paulo, SP. **Anais [...],** São Paulo, 2016.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio**: uma proposta para o problema da variabilidade. 2009. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

RÊGO, R. M. **Uma abordagem alternativa de ensino de cálculo utilizando infinitésimos**. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2000.

REZENDE, W.M. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SARUBBI, P. A.; SOARES, F. Investigando dificuldades de alunos em problemas de Cálculo de taxas relacionadas. In: COBENGE, 37, Recife, PE. **Anais [...]**, Recife, PE, 2009.

TALL, D.O. Intuitive infinitesimals in the calculus. In: International Congress on Mathematical Education, 4, 1980, Berkeley. **Proceedings [...].** Berkeley: University of Berkeley, p.170-6, 1980.

TALL, D.O. Elementary axioms and pictures for infinitesimal calculus. **Bulletin of the IMA**, v.18, p.44-8, 1982.

TALL, D.O. **A Sensible Approach to the Calculus.** Handbook on Calculus and its Teaching, ed. François Pluvinage & Armando Cuevas, 2012.

TALL, D. O., VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n.12, p.151-69, 1981.