O CONCEITO DE DERIVADA E A PESQUISA-AÇÃO NA AULA DE CÁLCULO I

THE DERIVATIVE CONCEPT AND ACTION RESEARCH IN THE CALCULATION CLASS I

Rosi Kelly Regina Marmitt[1]

Danusa de Lara Bonotto[2]

Izabel Gioveli[3]

Resumo

Este trabalho tem como objetivo relatar a experiência do desenvolvimento de uma sequência didática realizada no componente curricular Cálculo I com acadêmicos dos cursos de Física – Licenciatura e Agronomia de uma Universidade pública localizada no interior do Rio Grande do Sul. Tal experiência baseia-se nos referenciais teóricos da pesquisa–ação entendendo-a como um processo de reflexão da prática docente e é fundamentada nos pressupostos da Modelagem Matemática na Educação Matemática com enfoque para resolução de um problema de otimização. O objetivo da sequência didática consistiu em favorecer aos acadêmicos a (re)construção do tópico 'Derivada e suas aplicações', o qual faz parte da ementa de Cálculo I. Para tal, buscamos compreender as estratégias utilizadas pelos acadêmicos ao resolverem um problema de otimização de área. Desse modo, olhamos para o processo de resolução do problema, as dificuldades e estratégias apresentadas pelos acadêmicos, bem como para o papel da mediação pedagógica. A partir do contexto vivenciado observamos que os acadêmicos não mobilizaram o conceito de derivada para a resolução do problema proposto e utilizaram tratamentos numéricos por tentativa e aproximação. Para a expressão do modelo na representação algébrica e mobilização do conceito de derivada foi necessário a intervenção/mediação da professora.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática; Derivada; Otimização de área. Modelagem.

Abstract

This paper aims to report the experience of developing a didactic sequence carried out in the curricular component Calculus I with academics from the Physics – Licentiate and Agronomy courses of a public university located in the interior of Rio Grande do Sul. Such experience is based on the references research theorists-action understanding it as a process of reflection on teaching practice and is based on the assumptions of Mathematical Modeling in Mathematics Education with a focus on solving an optimization problem. The purpose of the didactic sequence was to favor the (re)construction of the topic 'Derivative and its applications' for students, which is part of the Calculus I menu. To this end, we seek to understand the strategies used by students when solving an optimization problem of area. Thus, we look at the problem

[1] Mestre em Ensino de Ciências. Universidade Federal da Fronteira Sul *Campus* Cerro Largo. rosikellyregina@gmail.com.

[2] Doutora em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal da Fronteira Sul *Campus* Cerro Largo. danusabonotto@hotmail.com.

[3] Doutora em Engenharia. Universidade Federal da Fronteira Sul *Campus* Cerro Largo. izabel.gioveli@uffs.edu.br.

solving process, the difficulties and strategies presented by academics, as well as the role of pedagogical mediation. From the experienced context, we observed that the academics did not mobilize the concept of derivative to solve the proposed problem and used numerical treatments by trial and approximation. For the expression of the model in algebraic representation and mobilization of the derivative concept, the teacher's intervention/mediation was necessary.

Keywords: Mathematics teaching; Derivative; Area optimization; Modeling.

Introdução

Este trabalho apresenta um relato de experiência decorrente do desenvolvimento de uma sequência didática realizada no componente curricular de Cálculo I. A sequência didática foi desenvolvida com o objetivo de compreender as estratégias utilizadas pelos acadêmicos do curso de Física - Licenciatura e Agronomia ao resolverem um problema de otimização de área fundamentado nas ideais da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

O conceito de derivada é central no componente curricular de Cálculo I e seu estudo está presente na grade curricular de diferentes cursos de graduação visto que esse conceito possui relação com aplicações em diferentes áreas de conhecimento na abordagem, por exemplo, de variação e movimento. Entretanto, conforme Gonçalves e Reis (2013, p. 420), "a derivada tem sido um dos tópicos do Cálculo Diferencial e Integral em que os estudantes apresentam muitas dificuldades de aprendizagem".

Nas aulas de Cálculo I, a partir da nossa prática docente, percebemos que as dificuldades se manifestam na utilização da noção conceitual da derivada e suas diferentes interpretações para resolução de problemas, em detrimento da utilização das regras operatórias para calcular a derivada de uma determinada função. Desse modo, a partir do entendimento de pesquisa-ação fundamentado em Alarcão (2011) e dos pressupostos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática de Biembengut (2016), propomos a resolução de um problema de otimização aos acadêmicos, buscando favorecer a aprendizagem da noção conceitual da derivada ao mobilizarem esse conceito num problema aplicado, bem como, compreender as estratégias utilizadas pelos acadêmicos para a resolução do problema proposto.

Para Alarcão (2011, p. 52) a pesquisa-ação é uma "metodologia de intervenção social cientificamente apoiada e desenrola-se segundo ciclos de planificação, ação, observação, reflexão". Assim, esse ciclo numa perspectiva emancipadora e crítica favorece a *reflexão na, sobre e para a ação*.

Destacamos que na pesquisa-ação, conforme Fiorentini e Lorenzato (2009) o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes. Nesse sentido, buscamos a partir da compreensão das estratégias apresentadas pelos acadêmicos para a resolução do problema, além de favorecer a (re)construção do conceito de derivada, qualificar nossa prática docente enquanto professoras de Matemática.

A espiral reflexiva e o desenvolvimento da prática pedagógica

A experiência realizada envolveu a intervenção no contexto de um grupo de acadêmicos, os quais cursavam o componente curricular (CCR) Cálculo I do curso de Física- Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul – *Campus* Cerro Largo com o objetivo de favorecer a (re)construção acerca do tópico 'Derivada e suas aplicações', o qual é conteúdo programático do CCR. Os participantes são acadêmicos dos cursos de Física-Licenciatura (10) e Agronomia (11). Para a realização da atividade os 21 acadêmicos foram agrupados em cinco grupos.

A experiência desenvolveu-se seguindo os ciclos definidos por Alarcão (2011), a qual assinala que "por processos de observação e reflexão, a experiência é analisada e conceptualizada. Os conceitos que resultam deste processo de transformação servem, por sua vez, de guias para novas aprendizagens" (Alarcão, 2011, p.53). Os ciclos dessa espiral reflexiva estão descritos, a seguir:

1) Planejamento: o planejamento da atividade foi realizado por duas professoras as quais ministram o CCR Cálculo I na Universidade e por uma mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da mesma Universidade em dois encontros de aproximadamente 2 horas, considerando os pressupostos da Modelagem Matemática na Educação Matemática de modo a favorecer o protagonismo dos acadêmicos. O tópico abordado refere-se a 'Derivada e Aplicações' com enfoque para problemas de otimização.

Conforme Biembengut (2014, 2016) o processo de Modelagem Matemática perpassa pelas etapas: 1) *percepção e apreensão,* na qual se dá a escolha do tema e familiarização com o assunto; 2) *compreensão e explicitação*, a qual envolve a formulação do problema, do modelo matemático e a explicitação da resolução do problema a partir do modelo*;* 3) *significação e expressão*, ocupa-se de interpretar e avaliar os resultados, verificando sua validade e expressando todo o processo a outros (estudantes, professores, comunidade), de forma oral e/ou escrita. A adaptação do processo de modelagem para o ensino de Matemática, a autora denomina de Modelagem na Educação (ME) e compreende como um método de ensino com pesquisa. A ME orienta-se pelo ensino do conteúdo curricular (e não curricular) a partir da elaboração ou (re)elaboração/adaptação de modelos aplicados em alguma área do conhecimento e pela orientação dos alunos à pesquisa. Portanto, pode-se compreender que ela é uma atividade de modelagem planejada previamente pelo professor.

O problema proposto teve como motivação uma mesa de ping-pong, utilizada para lazer pelos acadêmicos em horários intermediários às aulas. A mesa é localizada no quarto andar do bloco A da UFFS Campus Cerro Largo-RS, no qual ocorrem as aulas do referido CCR.

Entrelaçando o interesse dos acadêmicos e o conteúdo que estava sendo trabalhado no CCR, propusemos a resolução do seguinte problema: Considere a mesa de ping-pong localizada no quarto andar do bloco A da UFFS Campus Cerro Largo-RS.

a) Com um barbante de x metros de comprimento, como é possível cercar a mesa de ping-pong, de forma retangular, de modo que a área cercada seja máxima.
b) Determine a medida da distância das bordas da mesa até o barbante de modo que a mesa fique localizada no centro da região de área máxima.
c) Encontre a expressão matemática que representa a área cercada pelo barbante utilizado e comprove o resultado que você encontrou nos itens anteriores.

Destacamos que os acadêmicos já haviam estudado a derivada e suas diferentes interpretações: coeficiente angular de reta tangente, velocidade instantânea e taxa de variação instantânea, os quais foram devidamente sistematizados em sala de aula, bem como as regras de derivação. Entretanto, os acadêmicos não haviam estudado ainda a resolução de problemas de otimização utilizando a noção conceitual da derivada.

Inicialmente discutimos conjuntamente o modo de apresentação da atividade, as possíveis estratégias e dificuldades dos acadêmicos e o processo de observação. Nesse processo, levamos em consideração o favorecimento da participação interativa dos acadêmicos, à luz da perspectiva histórico-cultural para a qual o estudante "elabora conhecimentos sobre os objetos em processos necessariamente mediados pelo outro e constituídos pela linguagem" (Góes, 1997, p. 13).

Em relação ao modo de apresentação do problema inicialmente discutimos se seria realizado ou não uma introdução ao estudo de otimização. Desse modo, optamos por reconhecer o que os acadêmicos compreenderiam sobre o significado de otimização e a seguir, sobre modelos e modelagem matemática. A partir disso, planejamos a realização de intervenções pela professora, por meio do estudo de um gráfico, de modo que a interpretação da derivada como coeficiente angular da reta tangente fosse utilizada para identificação de possíveis pontos de máximo e mínimo. Esperávamos que a utilização desse conceito surgisse na resolução do problema de otimização.

Ainda, discutimos sobre os comprimentos dos barbantes para a resolução do problema, considerando as medições do espaço no qual está localizada a mesa de ping-pong, realizadas previamente pelas professoras. A partir daí, definimos que os comprimentos dos barbantes seriam diferentes para cada grupo, pois desse modo, poderiam surgir discussões e estratégias diferentes de resolução. Conforme Vigotski (2000), o desenvolvimento dos conceitos é produzido nos processos de ensino, nos quais há uma interação sistemática e deliberada do professor com os alunos.

Desse modo, os acadêmicos são colocados diante de um problema, no qual a sua resolução envolve o conceito de derivada e sua relação com outros conceitos (área, perímetro, função e suas diferentes representações), visto que "a relação do aluno com o conceito é sempre mediada por algum outro conceito" (Silva; Schnetzler, 2006, p. 61). Na sequência, apresentamos o processo de desenvolvimento da aula, no qual abordamos a resolução do problema apresentado anteriormente.

2) Ação: a implementação da resolução do problema realizou-se em aproximadamente 4 horas-aula no componente curricular de Cálculo I, pela professora responsável pelo CCR e foi observada pela aluna mestranda. De acordo com Bonotto (2017), a implementação do processo de Modelagem Matemática na Educação Matemática provoca mudanças na organização da aula, ou seja, na organização de um meio favorável ao desenvolvimento de capacidades e à aprendizagem de determinados conteúdos e também no agir dos acadêmicos e do próprio professor. A ação do professor é singular, dinâmica e exige decisões que são tomadas considerando o contexto específico do seu trabalho.

Iniciamos a aula, reconhecendo o que os acadêmicos compreendiam sobre o termo 'otimização' e solicitando exemplos que remeteriam a ideia de otimizar um problema. Os acadêmicos apresentaram como respostas que esse conceito está vinculado ao aumento de produtividade trazendo como exemplo a utilização de insumos: otimizar o uso de insumos para que a produção seja máxima e foi apresentado pela professora um exemplo que abordou a utilização de uma folha de papel para a construção de uma caixa de modo que o volume da caixa fosse o maior possível ou que o desperdício do material fosse o menor possível.

A partir dessas discussões iniciais, procuramos reconhecer a compreensão dos acadêmicos acerca de modelos matemáticos, os quais sugeriram que seria uma "fórmula", "algo para se basear", "repetido por outra pessoa em outro lugar", "colocar uma situação real numa conta". Percebemos que a noção apresentada pelos acadêmicos assemelha-se ao que Biembengut (2014, p. 20) denomina de "um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. [...] pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas".

Na sequência, realizamos a discussão de um gráfico a fim de (re)lembrar o conceito de derivada e os intervalos de crescimento de uma função utilizando tal conceito. Isso foi realizado a fim de facilitar as relações entre a resolução do problema proposto e a utilização do conceito de derivada para a determinação da área máxima possível com o perímetro considerado em cada grupo.

Em relação ao processo de Modelagem Matemática na Educação Matemática, a familiarização com o assunto/problema a ser resolvido, realizou-se no espaço destinado à mesa de ping-pong. Para tal, os acadêmicos tiveram a sua disposição barbantes com diferentes comprimentos: 15m, 18m, 22 m, 27m e 30m, fita métrica, calculadora e uma folha contendo o problema a ser resolvido. Destacamos a importância dos barbantes possuírem comprimentos diferentes, a fim de que percebessem que independente do comprimento do barbante a área máxima, no contexto do problema estabelecido, é sempre a área de uma região quadrada. A partir daí, cada grupo deveria dialogar com seus pares e estabelecer estratégias para resolver o problema proposto.

3) Observação: A observação constitui-se numa base documental para reflexões posteriores. Ao implementar a resolução do problema observamos o desenvolvimento da aula, realizamos a escrita do diário observando as atitudes e comportamentos dos acadêmicos e de nós mesmas, os efeitos da ação, o que deu certo e em que circunstância, bem como, as limitações encontradas. Na sequência, textualizamos as observações referentes à realização da resolução do problema proposto pelos acadêmicos.

Ao receberem o problema, os acadêmicos foram orientados à realização da leitura do mesmo. A partir daí, a professora questionou o que eles haviam compreendido. As passagens, a seguir, ilustram o exposto.

Professora: Me digam o que entenderam do problema.

Acadêmico: Cercar a mesa de ping-pong.

Professora: Mas não é cercar a mesa de qualquer jeito. É cercar a mesa de modo que a área cercada seja máxima.

Observamos que inicialmente eles não haviam compreendido a utilização do barbante e a noção da mesa estar centralizada na região de área máxima. Assim, o processo inicial de familiarização com o tema foi mais demorado do que o previsto.

Prevíamos que eles chegariam a resposta por tentativa e erro, ou seja, realizariam medições em torno da mesa até encontrarem as dimensões que determinariam a maior área. Entretanto, essa ação não foi imediata, sendo necessário a mediação da professora articulando os conhecimentos dos acadêmicos e suas dúvidas para que eles dessem sequência à atividade, conforme denotam as passagens, a seguir:

Acadêmico: Eu dei três voltas com o barbante na mesa.

Professora: Professora: mas, dar três voltas[...], o que isso tem a ver com a área máxima?

Do exposto, os acadêmicos tentaram cercar a mesa de ping-pong com o barbante mais de uma vez o que levou a professora a perceber que o grupo não havia entendido o problema proposto. Nesse momento, a fim de favorecer maior clareza aos alunos sobre o problema que havia sido proposto, sinalizamos para este grupo a ação de outro grupo de acadêmicos que estavam cercando a mesa com o barbante uma única vez. Na sequência, as interações discursivas adentram na compreensão da noção de centralidade da mesa na região de área máxima, quando sinalizamos para a distância da borda até o barbante, conforme denotam as passagens, a seguir:

Acadêmico: A mesa tem que ser o centro!

Acadêmico: Mas pode usar a área dela (da mesa)?

Professora: Sim, pode. E depois, eu quero saber qual é a distância da borda da mesa até o barbante, para que a mesa fique centralizada.

Figura 1 - Alunos realizando as medições

Fonte: As autoras

A Figura 01 apresenta também as estratégias por um grupo de alunos: medir as dimensões da mesa e estabelecer uma região retangular em torno dela.

O desenvolvimento da resolução do problema seguiu nas discussões dos grupos, a partir de verificação das possíveis medidas que tornassem a área máxima. A seguir, os grupos dirigiram-se à sala de aula para a sistematização dos resultados. Na sala de aula, perguntamos aos acadêmicos se a utilização do barbante ajudou na resolução do problema, conforme passagens a seguir:

Professora: Vocês acham que o barbante ajudou ou atrapalhou?

Acadêmico: Sim, demais (referindo-se que o barbante havia atrapalhado).

Acadêmico: Pra nós ajudou.

Inicialmente, havíamos ponderado que o barbante ajudaria na compreensão do problema e que eles utilizariam o barbante em torno da mesa para a realização de algumas hipóteses acerca das medidas. Entretanto, reconhecemos que para alguns grupos a utilização do barbante dificultou o processo, ao passo que eles utilizaram a representação da situação por meio de um desenho no caderno, assinalando as dimensões da mesa de ping-pong e o comprimento do barbante. Os resultados obtidos pelos grupos, estão apresentados no Quadro 01, a seguir:

Quadro 01 – Resultados obtidos pelos grupos

Grupos	Comprimento do barbante	Área máxima
1	22m	30, 25m^2
2	30m	56,25 m^2
3	18m	20,25 m^2
4	15m	14,0625 m^2
5	27m	45,5625 m^2

Fonte: elaborado pelas autoras.

A partir da reflexão sobre o processo realizado, reconhecemos duas estratégias para a obtenção dos resultados aproximados apresentados no Quadro 01: 1) por medições sucessivas até a obtenção da maior área; 2) pela utilização da noção de que a maior área é a área de uma região quadrada, conforme apresentado, a seguir:

Grupo 1. A obtenção da área cercada máxima foi obtida através da tentativa e erro, até o momento que percebeu-se que um quadrado com os lados iguais se encaixaria nesse quesito.

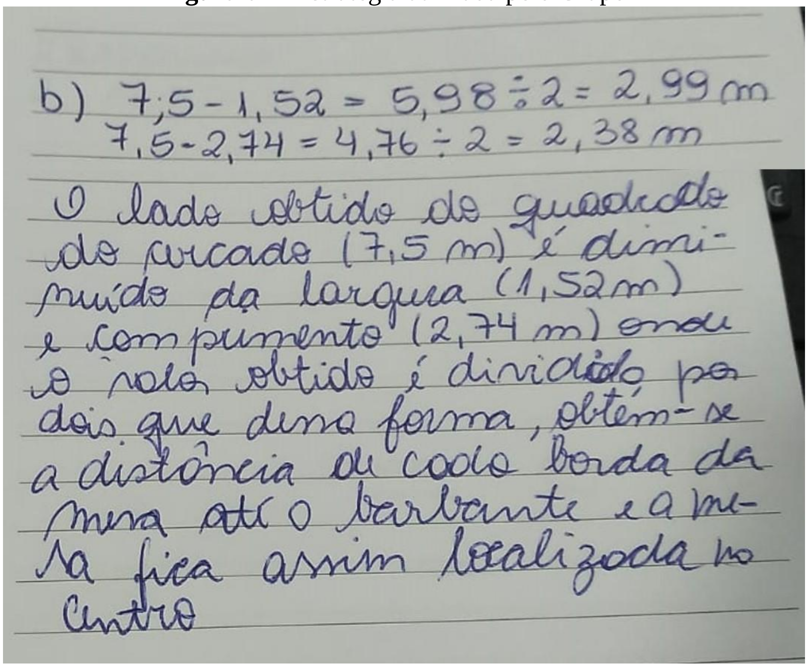
Grupo 3. A forma que forneceu a maior área foi a área do quadrado. Para obtermos o valor da área utilizamos o valor do perímetro (18 metros) dividimos por 4 (pelo motivo dos 4 lados) e elevamos ao quadrado e chegamos ao valor de 20,25 m².

Após a organização dos valores obtidos, questionamos os acadêmicos se todos perceberam que a maior área era a área de um quadrado, ao que eles responderam que sim.

Vale destacar a necessidade de valorizar as compreensões iniciais dos alunos e ajudá-los avançar cognitivamente, no sentido de justificar o porquê a região de área máxima é quadrada. Ainda, ambas as estratégias utilizadas resolvem o problema, entretanto, envolvem pensamentos diferentes, ou seja, cognitivamente as estratégias são diferentes.

A constatação acerca da área máxima tem impactos sobre a resolução do item b, o qual solicitava as medidas das bordas da mesa até o barbante, para que a mesma ficasse centralizada na região de área máxima, visto que a mesa tem forma retangular e a área máxima obtida assume a forma de um quadrado. Nesse sentido, observamos a utilização de duas estratégias, as quais estão apresentadas nas Figuras 02 e 03.

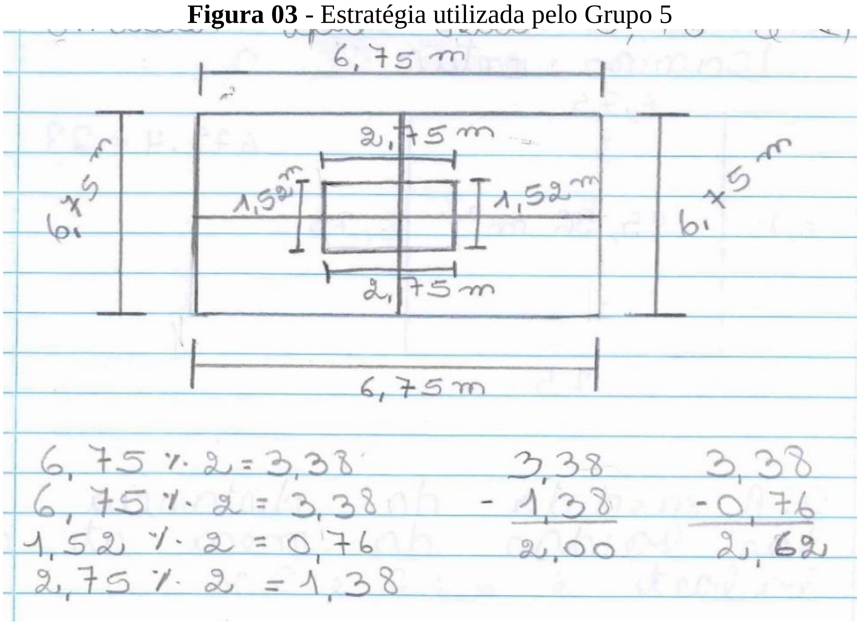
Figura 02 - Estratégia utilizada pelo Grupo 2


b) 7;5 - 1,52 = 5,98 ÷ 2 = 2,99 m
7,5 - 2,74 = 4,76 ÷ 2 = 2,38 m

O lado obtido do quadrado do cercado (7,5 m) é diminuído da largura (1,52m) e compimento (2,74 m) onde o valor obtido é dividido por dois que dessa forma, obtém-se a distância de cada borda da mesa até o barbante e a mesa fica assim localizada no centro

Fonte: Elaborado pelos acadêmicos

Figura 03 - Estratégia utilizada pelo Grupo 5



Fonte: Elaborado pelos acadêmicos

Destacamos que com exceção do Grupo 5, todos os demais utilizaram a estratégia de subtrair do lado do quadrado a medida do comprimento e largura da mesa de ping-pong e dividir os resultados por dois para determinar a distância das bordas da mesa até o barbante. Entretanto, o Grupo 5, utilizou uma estratégia diferente, conforme apresentada na Figura 03. Note que esse grupo utilizou o lado do quadrado e as dimensões da mesa e dividiu ambos por dois, para na sequência obter as respectivas distâncias. Observamos ainda que o Grupo 5 utilizou um raciocínio diferente dos demais, influenciado pela sua representação geométrica do problema e isso denota processos cognitivos diferentes e, portanto, são estratégias diferentes.

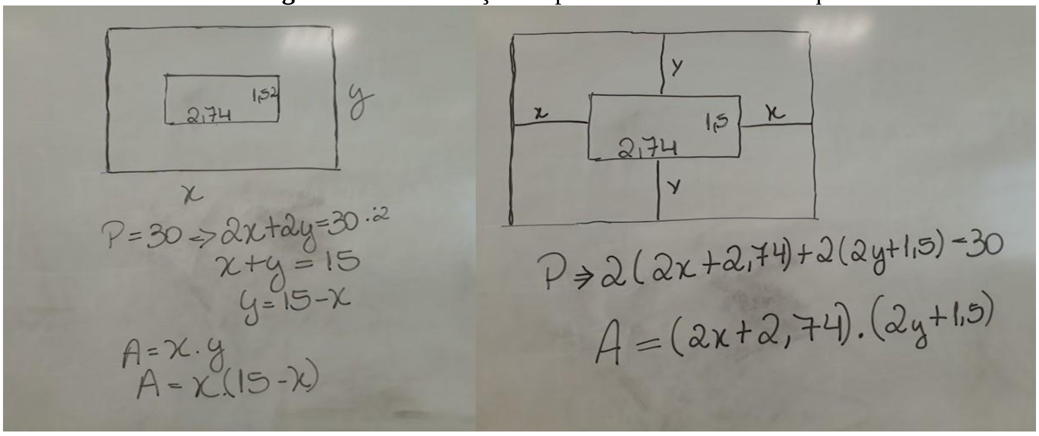
Em relação ao processo de Modelagem Matemática na Educação Matemática, no que diz respeito à obtenção do modelo, resolução e validação solicitamos, no item c, que os acadêmicos encontrassem a expressão matemática que representava a área cercada pelo barbante.

Observamos que eles apresentaram dificuldade no processo de matematizar o problema, ou seja, traduzi-lo utilizando a linguagem matemática. Destacamos que em nosso planejamento, acreditávamos que o processo de matematização aconteceria sem intervenções. Entretanto, observamos naquele contexto específico do processo de ensino, que os acadêmicos necessitavam de orientações para avançar na resolução do problema. Assim, a professora assumiu o papel de mediadora atuando, conforme Vigotski (2000) na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZPD) dos alunos. A ZPD,

> é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (Vigotski, 2000, p. 112).

Desse modo, realizamos intervenções chamando atenção para a representação, em linguagem algébrica, da área e do perímetro de uma região retangular. A Figura 04, ilustra parte desse processo.

Figura 04 - Intervenção da professora realizada no quadro



Fonte: As autoras

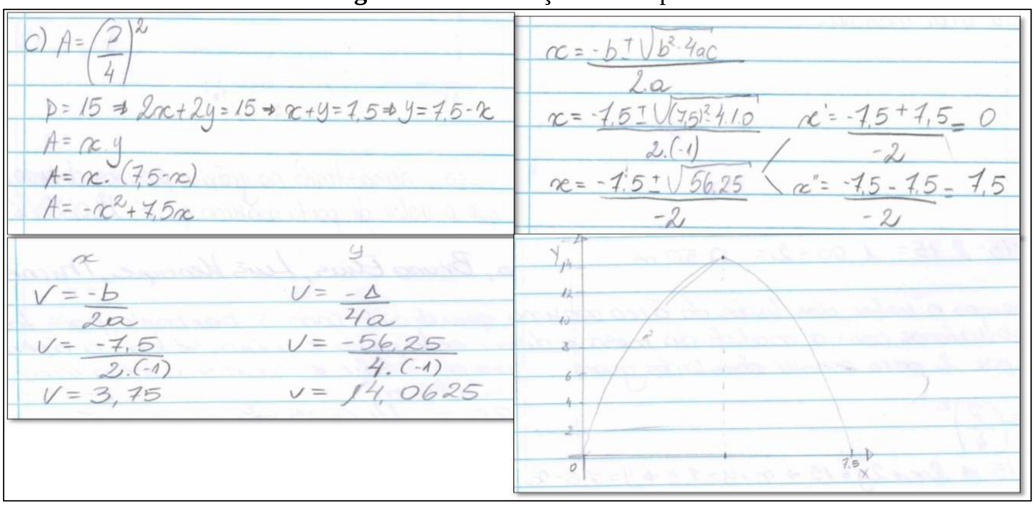
Orientamos o processo de obtenção do modelo matemático de duas maneiras: sem utilizar, inicialmente, as medidas da mesa de ping-pong ou utilizando as medidas da mesa, e neste caso, realizam-se tratamentos algébricos diferentes.

Na sequência, os acadêmicos trabalharam nos seus grupos na perspectiva de encontrar o modelo matemático que descrevesse a área máxima. Destacamos que dos cinco grupos, quatro deles não utilizaram as medidas da mesa de ping-pong.

O modelo que descreve o problema proposto, utilizando ambas as maneiras apresentadas, é uma função polinomial do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c, \ \ a,b,c \in R$ e $a \neq 0$, neste caso com $a < 0$ e cujo vértice $V = (x_V, y_v)$ denota o ponto de máximo.

As estratégias utilizadas pelos grupos estão apresentadas nas Figuras 05 e 06, a seguir.

Figura 05 – Resolução do Grupo 4

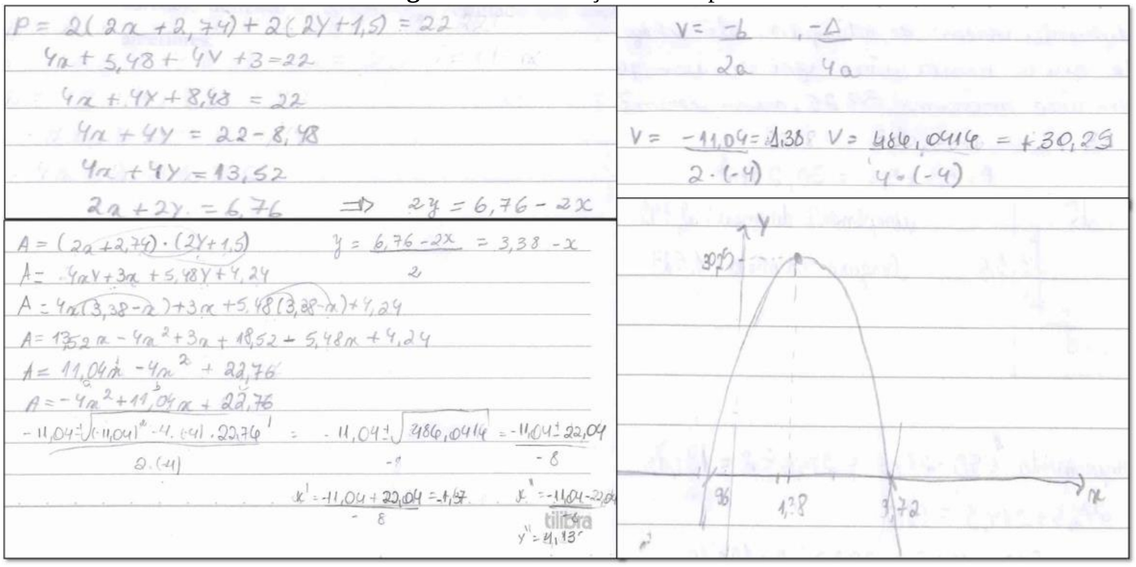


Fonte: Elaborado pelos acadêmicos

O Grupo 4 conclui que *"como demonstrado no gráfico podemos observar que o valor máximo é 14,0625 e é igual a área máxima"*. Destacamos neste caso, que o x_V é a medida do lado do quadrado.

O Grupo 1, optou por utilizar a medida da mesa de ping-pong e matematizou o problema, conforme a Figura 06.

Figura 06 - Resolução do Grupo 1

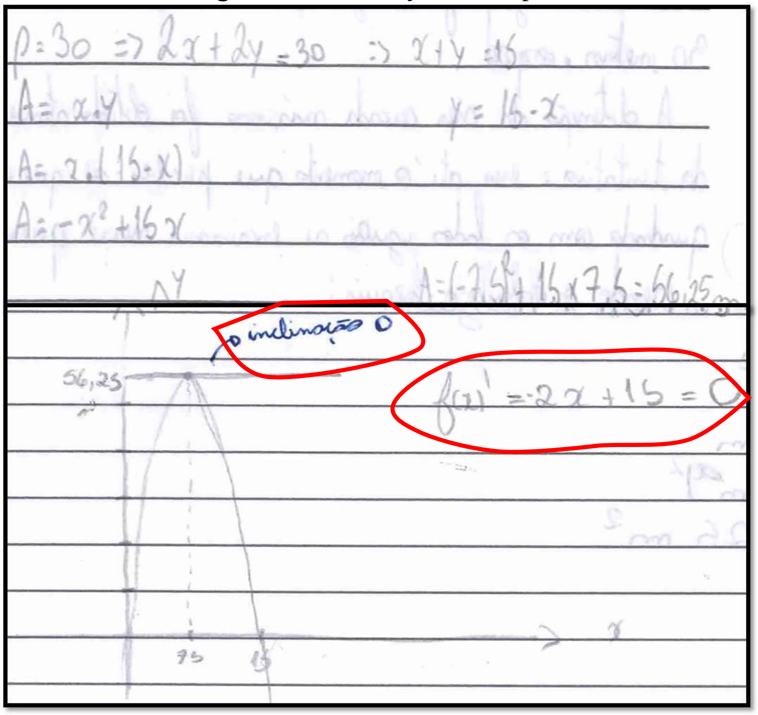


Fonte: Elaborado pelos acadêmicos

Destacamos, neste caso, que o x_V não representa a medida do lado do quadrado e faz-se necessário somar ao x_V o comprimento (2,74m) da mesa de ping-pong para obter a medida do lado do quadrado, portanto, as estratégias utilizadas são diferentes.

Ressaltamos que nas estratégias apresentadas acima, nas Figuras 05 e 06, os acadêmicos utilizaram o vértice da função polinomial do segundo grau para identificar a área máxima e validar o resultado obtido experimentalmente. Apenas um grupo fez menção à utilização do conceito de derivada para otimizar o problema, conforme Figura 07.

Figura 07 – Resolução do Grupo 2



Fonte: Elaborado pelos acadêmicos

Notamos na resolução deste grupo a indicação da inclinação da reta tangente à função polinomial do segundo grau no ponto V (7.5, 56.25) como uma estratégia para justificar a área máxima: *"quando substituímos na fórmula da área o x por 7,5 obtemos a área de 56,25 m². E quando derivamos a fórmula e depois substituímos obtemos a inclinação 0".*

Na etapa de validação do modelo, sistematizamos no quadro as resoluções dos grupos e destacamos a utilização do conceito de derivada para a resolução do problema, já que apenas um grupo recorreu a essa ideia, mesmo havendo inicialmente no planejamento e no início do desenvolvimento da aula a intenção de favorecer relações entre problemas de otimização e o conceito de derivada. As passagens, a seguir, denotam o exposto.

Professora: Que função é essa?

Acadêmico: quadrática

Professora: é uma função quadrática... neste caso aqui... vai ter concavidade para?

Acadêmico: baixo

Professora: se ela tem concavidade para baixo ela tem um ponto de máximo ou de mínimo?

Acadêmico: máximo

Professora: como vocês acham esse ponto de máximo?

Acadêmico: vértice

Professora: ou

Acadêmico: igual a zero

Professora: o que igual a zero?

Acadêmico: a tangente

Professora: e o que é a tangente?

Acadêmico: paralela ao eixo do x

Acadêmico: a inclinação

Professora: e isso é o que?

Após essas discussões, o processo foi sistematizado no quadro pela professora da seguinte forma: Considere P o perímetro de uma região retangular dado por $P = 2x + 2y = z$ em que z representa o comprimento do barbante ($z \in R_{+}^{*}$) e x e y as dimensões da região retangular (x$\in R_{+}^{*}$ e y$\in R_{+}^{*}$). A área da região retangular é representada por uma função do segundo grau, dada por $A(x) = x.y = x\left(\frac{z}{2} - x\right) = \frac{xz}{2} - x^2$ e sua representação gráfica é uma parábola com concavidade voltada para baixo. Na sequência, foi observado que o vértice da parábola $V = (x_V, y_V)$ consiste num ponto de máximo da função quadrática e que a reta tangente a função A nesse ponto é paralela ao eixo ox e, portanto, sua inclinação é zero, ou seja, derivada da função no x_V é zero $A'(x) = z - 4x = 0$ e assim $x = \frac{z}{4}$ e $y = \frac{z}{2} - \frac{z}{4} = \frac{z}{4}$, e a área máxima é $\frac{z^2}{16}$. Destarte realizou-se a análise do crescimento da função quadrática e foi abordado e sistematizado o teste da derivada primeira.

Destacamos no ciclo da espiral reflexiva que a observação constitui-se numa base documental para um novo movimento na espiral: a reflexão, ou seja, a partir da implementação do planejamento realizado é importante reconhecermos os efeitos desta ação, o que deu certo e em que circunstância, bem como as limitações encontradas.

4) Reflexão: após a implementação da resolução do problema realizamos a avaliação do mesmo, identificando as estratégias utilizadas pelos acadêmicos, bem como as dificuldades apresentadas. A reflexão permite a identificação dos problemas e restrições que se manifestaram durante a ação, bem como suas potencialidades. Neste sentido, Alarcão (2010, p. 54) aponta que "a reflexão sobre a ação pressupõe um distanciamento da ação. Reconstruímos mentalmente a ação para tentar analisá-la retrospectivamente".

Nesta perspectiva, percebemos em relação ao planejamento da atividade e sua implementação, que a noção de 'centralização' presente na letra b, precisou ser explicada, porque um grupo entendeu que as medidas das bordas da mesa até o barbante deveriam ser as mesmas. Nesse sentido, nossas intervenções foram necessárias para a compreensão do problema, visto que se as medidas fossem as mesmas, como a mesa é de forma retangular, então a área não seria máxima, conforme exemplificam as passagens, a seguir:

Professora: a ideia de centralização teria que mudar?
Acadêmico: a pergunta não ficou muito clara.
Professora: do centralizar?
Acadêmico: a gente achou que tinha que ser um retângulo também [...]
Professora: entendi... talvez, tivesse que reescrever a ideia de centralizar a mesa.

Diante do exposto, reconhecer o pensamento dos alunos sobre o problema, suas dúvidas e dificuldades permite a (re)organização da proposta e contribui para a melhoria do processo de ensino.

Evidenciamos dificuldades no tratamento algébrico e na representação gráfica para validar o resultado obtido. Ademais, os valores obtidos na resolução da equação do segundo grau constituíam-se de números racionais na sua representação decimal, o que também causou dificuldade de tratamento.

Destacamos a importância da mediação pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem, conforme apontam Silva e Schnetzler (2006, p. 61) é por meio da mediação pedagógica que o professor "compartilha com os alunos sistemas conceituais instituídos, linguagens, instrumentos, estratégias, procedimentos, atitudes, valores e saberes próprios dessa cultura". Destacamos que a mediação foi importante durante o desenvolvimento de todo o processo e também, na sistematização do que foi realizado, visto que os resultados indiciam que noção conceitual da derivada foi abordada apenas pelo Grupo 2, conforme Figura 07, apresentada anteriormente.

Ainda, de acordo com o referencial histórico-cultural o processo de mediação é fundamental para que o aluno faça o processo de internalização, o qual consiste a partir-de Vigotski (1993) em uma reconstrução interna de uma operação externa, apropriando-se dos conceitos científicos que demandam operações lógicas complexas que ainda não são dominados pelos alunos.

A mediação pedagógica, neste caso, envolveu interações discursivas as quais permitiram a interrelação entre os conceitos estudados no CCR Cálculo I e a (re)construção do conceito de derivada, via sistematização da resolução do problema.

Ainda, ressaltamos a importância da escrita do diário das aulas e da gravação em áudio da aula, pois auxiliou no processo de reflexão, visto que, a produção escrita de diários constitui-se num instrumento no qual realizamos anotações, registramos nossos entendimentos, dificuldades e possibilidades com vistas a qualificar a prática docente e qualificar os processos de ensino e aprendizagem. Para Porlán e Martín (1997, p. 19-20, tradução nossa), o diário do professor:

> permite refletir o ponto de vista do autor sobre os processos mais significativos da dinâmica que está imerso. É um caminho para reflexão sobre a prática, favorecendo a tomada de consciência do professor sobre seus processos de evolução e sobre seus modelos de referência. Favorece, também, o estabelecimento de conexões significativas entre o conhecimento prático e o conhecimento disciplinar, o que permite a tomada de decisões mais fundamentada.

Por fim, destacamos a partir de Alarcão (2011, p. 53) que a "aprendizagem é um processo transformador da experiência no decorrer do qual se dá a construção de saber" e as compreensões resultantes desse processo constituem-se em "guias para novas experiências, o que confere à aprendizagem também um caráter cíclico e desenvolvimentista".

Considerações Finais

O objetivo deste texto consistiu em relatar a experiência realizada e fundamentada nos princípios da pesquisa-ação e dos pressupostos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. O objetivo da sequência didática consistiu em favorecer a (re)construção acerca do conceito de derivada, visto que os acadêmicos para os quais a atividade foi planejada, já haviam estudado as diferentes interpretações da derivada.

Desse modo, a partir das estratégias utilizadas pelos acadêmicos e, identificadas e apresentadas neste texto, reconhecemos que apenas o Grupo 2 apresentou indícios da noção conceitual da derivada para a resolução do problema proposto e todos os grupos valeram-se de tratamentos numéricos para a obtenção dos resultados utilizando tentativa e aproximação.

O processo de observação e reflexão da espiral reflexiva permite afirmar que a obtenção do modelo na sua forma algébrica constitui-se numa dificuldade para os alunos, ainda que, os tratamentos algébricos já tenham sido realizados desde a Educação Básica. Nesse sentido, ações necessitam ser organizadas de modo a minimizar tais dificuldades.

Do exposto, realçamos o valor formativo da pesquisa-ação e os pressupostos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática para qualificar os processos de ensino e aprendizagem, em particular, da noção conceitual de derivada. Destacamos que ao escrever sobre a prática realizada, contando a experiência, o professor faz mais do que registrar o acontecimento, ele altera sua forma de pensar e de agir, reflete sobre a experiência vivenciada ao passo que escreve sobre ela, reconhece o que poderia ter sido diferente, o que deu certo e se o desenvolvimento atingiu o objetivo proposto. Nessa dinâmica um ciclo da espiral se encerra, mas outro se inicia e esse movimento é constitutivo da aprendizagem docente e da identidade profissional do professor.

Referências

ALARCÃO, I. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva.** São Paulo: Cortez, 2011.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem no Ensino Fundamental**. Blumenau: Edifurb, 2014.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BONOTTO, D. L. **(Re)configurações do Agir Modelagem na Formação Continuada de Professores de Matemática da Educação Básica**. Tese de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática. Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. 310 p. 2017.

CARR, W. e KEMMIS, S. **Teoria crítica de la enseñanza**: investigación-acción en la formación del profesorado. Barcelona: Martinez Roca, 1988.

CONTRERAS, J. D. La investigación en la acción. **Cuadernos de Pedagogía**, Madrid: Morata, nº 224, p. 7-19. 1994.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2009.

GÓES, M. C. R. e CRUZ, M. N. Sentido, significado e conceito: notas sobre as contribuições de Lev Vigotski. **Pro-Posições**, v. 17, n. 2, p. 31-45. 2006.

GÓES, Maria Cecília Rafael de. As relações intersubjetivas na construção de conhecimentos. In: GÓES, M. C. R. e SMOLKA, A. L. B. (Orgs.). **A significação nos espaços educacionais**: Interação social e subjetivação. Campinas: Papirus, 1997. p. 11-28.

GÜLLICH, R. I. C. **O livro didático, o professor e o ensino de ciências**: um processo de investigação-formação-ação. Tese de Doutorado em Educação nas Ciências. Ijuí: Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. 263 p. 2012.

PORLÁN, R. e MARTÍN, J. **El diario del profesor**: um recurso para investigación em el aula. Díada: Sevilla, 1997.

ROSA, M. I. P. **Investigação e ensino**: articulações e possibilidades na formação de professores de ciências. Ijuí: Ed. Unijuí, 2004.

SILVA, L. H. A. e SCHNETZLER, R. P. A mediação pedagógica em uma disciplina científica como referência formativa para a docência de futuros professores de Biologia. **Ciência & Educação**. v. 12, n. 1, p. 57-72. 2006.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1993

VIGOTSKI, L. S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.