EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS:
Pesquisa em Educação Matemática

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS COM A MODELAGEM DE CONFECÇÃO DE CESTOS

LEARNING OF MATHEMATICAL CONCEPTS WITH THE MODELING OF BASKET CONFECTION

Eliziane Comachio [1]

Pedro Augusto Pereira Borges [2]

Resumo

A modelagem tem se mostrado um recurso didático de interesse dos professores e pesquisadores, por suas propriedades de investigar o real empregando linguagem simbólica, e com isso, gerar ambientes de aprendizagem matemática. O presente trabalho coloca-se nesse contexto, com o objetivo de analisar possíveis oportunidades de aprendizagem de conceitos matemáticos em uma experiência de modelagem da confecção de cestos, desenvolvida em um curso de Licenciatura em Matemática. A metodologia da pesquisa consiste na descrição e análise qualitativa de atividades de modelagem, utilizando a análise de conteúdo. Dois modelos sobre a quantidade de material empregado na confecção de protótipos de cestos foram descritos e analisados com categorias definidas a partir da concepção de aprendizagem da Teoria dos Campos Conceituais, sobre as possibilidades de contribuições da modelagem na aprendizagem de matemática. Constatou-se que a modelagem, além de gerar conceitos sobre o real, amplia o campo conceitual dos conteúdos escolares, integrando áreas da matemática, atribuindo sentidos, criando e praticando as representações simbólicas da linguagem matemática.

Palavras-Chave: Modelagem matemática; Aprendizagem e modelagem; Campos conceituais.

Abstract

Modeling has proved to be a didactic resource of interest to teachers and researchers, due to its properties of investigating the real using symbolic language, and with that, generating mathematical learning environments. The present work is placed in this context, with the objective of analyzing possible opportunities for learning mathematical concepts in a basket making modeling experience, developed in a Mathematics Degree course. The research methodology consists of the description and qualitative analysis of modeling activities, using content analysis. Two models on the amount of material used in making basket prototypes were described and analyzed with categories defined based on the conceptual conception of the Theory of Conceptual Fields, on the possibilities of modeling contributions in the learning of mathematics. It was found that modeling broadens the conceptual field of school content, integrating areas of mathematics, assigning meanings, creating and practicing symbolic representations of mathematical language.

Keywords: Mathematical modeling. Learing and modeling. Conceptual fiels.

[1] Licenciada em Matemática; Mestranda no PROFMAT/UTFPR/Pato Branco, PR; Professora na rede estadual de ensino/SC.Email: lizicomachio@gmail.com)

[2] Doutor em Engenharia Mecânica/UFRGS; Pós-Doutor em Educação Científica e Tecnológica/UFSC. Universidade Federal da Fronteira Sul/UFFS. Email: pedro.borges@uffs.edu.br.

Introdução

O potencial da modelagem como estratégia de ensino e de aprendizagem de matemática, tem tido o reconhecimento de pesquisadores, devido às propriedades de contextualização, conexão com a cultura, criação, investigação, elaboração de conceitos e proposição de problemas matemáticos. Em Biembengut e Hein (2000) e Almeida *et al* (2016) encontram-se orientações de como efetivar a modelagem na Educação Básica, além de modelos detalhados, alguns resultantes de experiências pedagógicas, os quais poderiam servir como base para a iniciação de professores na aplicação de modelagem em suas aulas. Para Eleni e Vanilde Bisognin, a diversidade das ações proporcionadas pela modelagem, leva à construção de conceitos e ao desenvolvimento de competências matemáticas.

> No processo da Modelagem Matemática, em suas diferentes etapas de execução, os alunos necessitam analisar informações, usar diferentes modos de representação, sejam elas algébricas, gráficas, geométricas ou numéricas, formular problemas, desenvolver modelos e procurar soluções, formular e justificar conjecturas, analisar e interpretar os resultados. Durante o processo de desenvolvimento de atividades de modelagem, seja individualmente ou em grupo, os alunos constroem novos conhecimentos e diferentes competências (BISOGNIN e BISOGNIN, 2014, p. 135).

No pensamento matemático, segundo Levy, ocorrem processos indutivos (geralmente iniciais, ligados à análise de casos particulares e à criação de proposições) e dedutivos (demonstrações das proposições). Assim, a modelagem, como uma investigação indutiva do real, ao descrever simbolicamente casos particulares desse, desenvolve "habilidades matemáticas previamente internalizadas ou assimiladas pelo corpo discente" (LEVY, 2016, p. 296) e proporciona oportunidades de criação de novos conceitos. Mesmo assim, Levy entende "a modelagem matemática como uma das alternativas didático-pedagógicas no que tange à aprendizagem de Matemática, e não como a única via para a consecução dessa aprendizagem. (LEVY, 2016, p. 299). Rosa e Orey concordam com a tese de que a modelagem é "um ambiente de aprendizagem que pode facilitar a construção do conhecimento matemático, pois esse ambiente promove a construção, a acumulação, a manipulação e a disseminação do conhecimento matemático", além de enfatizarem a elaboração de modelos como um ato criativo (ROSA e OREY, 2012, p. 273).

Apesar desse reconhecimento, ainda há, em nosso entendimento, a necessidade de mostrar empiricamente – observando e analisando muitas e diversas situações de modelagem nas escolas, na universidade, nos ambientes de formação de professores – como ocorrem os processos de significação, de representação simbólica do real e como tudo isso contribui, ou não, para a aprendizagem de matemática. O presente trabalho coloca-se nesse contexto, propondo-se a investigar as possibilidades de aprendizagem de conceitos matemáticos em experiência de modelagem da confecção de cestos, gerada no âmbito de um curso de Licenciatura em Matemática.

Na segunda seção é apresentada a concepção de aprendizagem presente na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e como entende-se que ela possa explicar os processos de construção de conceitos matemáticos em atividades de modelagem no ambiente escolar.

A metodologia de pesquisa é apresentada na terceira seção, com apoio nas ideias de Skovsmose (2015) sobre as possibilidades de análise do objeto de investigação em educação, como algo a ser descrito tal como foi, porém, também como possibilidades, desfechos, cenários e aprendizagens que poderiam ter ocorrido, ou ainda, que possam vir a se efetivar em experiências futuras.

A solução do problema de modelagem (determinação genérica da quantidade de materiais necessários para a confecção dos cestos) desenvolvida em sala de aula e complementada posteriormente, foi encaminhada com a elaboração de cestos (modelo empírico) e dois modelos matemáticos, descritos com suas considerações geométricas, deduções das equações, implementação computacional e resultados, na quarta seção. Um exame do ocorrido na experiência e nas complementações permitiu identificar e caracterizar as contribuições da modelagem na construção dos conceitos matemáticos, o que está descrito na quinta seção.

A formação dos conceitos, aprendizagem de matemática e modelagem

A TCC de Gérard Vergnaud – desenvolvida com forte influência de Piaget e Vigotski – segue a vertente construtivista, dando atenção aos processos de aprendizagem de conceitos matemáticos e aos fenômenos de sala de aula, motivo pelo qual foi adotada como referência neste trabalho. Para tanto, alguns termos são fundamentais na sua formulação, tais como conceitualização, campo conceitual, situação, invariantes, representação simbólica, atividade, mediação e esquemas.

O campo conceitual é, para Vergnaud, "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição" (MOREIRA, 2002, p. 8). Assim, um conceito matemático não está isolado de outros – já que conceitos mais simples podem ser necessários para sua construção – e, para sua assimilação, está associado a situações reais ou imaginárias que façam sentido para o sujeito.

Na TCC, um conceito em geral – como os conceitos de mesa, automóvel, escola – e particularmente os matemáticos – como os conceitos de triângulo, polígono, reta, número – é constituído como um tripleto de três conjuntos: o conjunto de problemas, situações reais ou imaginárias cujos objetos, fatos e ações tenham *sentido* para o sujeito (S); o conjunto dos invariantes (I) ou ideias que identificam os objetos, propriedades ou relações que viabilizam o reconhecer, referir-se, operar, analisar ou dominar essas situações (os *significados*); e o conjunto das representações (R) desses invariantes através de uma linguagem (os *significantes),* seja ela natural (oral, gestual, corporal) ou simbólica (escrita, pictórica, gráfica ou matemática), o que viabiliza o pensamento individual e o compartilhamento com os outros (MOREIRA, 2002, p. 10; PLAISANCE e VERGNAUD, 2003, p.76).

Para Vergnaud, a aprendizagem é um processo de adaptação dos conceitos a novas situações – portanto um processo pelo qual ocorre o aumento de conhecimentos – que "depende de quatro grandes ideias: a atividade do sujeito que aprende, a oferta de situações favoráveis ao aprendizado, a mediação por parte das pessoas que o rodeiam, a utilização de formas linguísticas e de formas simbólicas para comunicar e representar". (PLAISANCE e VERGNAUD, 2003, p. 64-65).

A consideração da *atividade* do sujeito que aprende é uma das principais diferenças entre as concepções comportamentalista e cognitivista da aprendizagem. A atividade supõe ações de iniciativa do sujeito, tais como perceber o real, separar e agrupar coisas de acordo com algum critério, ordenar, modificar o real, fazer hipóteses sobre essas modificações, testar, julgar por si mesmo e resolver problemas. "Desde a mais tenra idade o bebê dá prova de uma intensa atividade perceptiva e gestual em relação aos objetos de seu meio ambiente; e é essa atividade que lhe permite extrair relações estáveis entre as ações e seus resultados, e entre os objetos" (PLAISANCE e VERGNAUD, 2003, p. 66). A atividade é movida por interesse, curiosidade, objetivos e ocorre mediante esquemas que o sujeito elabora e executa, compostos por elementos abstratos (regras, definições, conceitos, desejos, sentimentos) e reais (informações do meio obtidas pelos sentidos, ações físicas de tocar, mover, falar), para transitar pelos conjuntos S-I-R, adaptando, substituindo e lapidando os conceitos. "Na verdade são os esquemas que se adaptam, isto é, as formas de organização da atividade; estes se modificam ao enfrentar-se novas situações" (VERGNAUD, 2017, p. 18). A análise dos esquemas desenvolvidos em uma atividade mostra o caminho percorrido pelo sujeito para elaborar um estágio do conceito a aprender. Nas palavras de Vergnaud,

> O esquema é uma totalidade dinâmica funcional, uma organização invariante da conduta, quanto a uma certa classe de situações. Essa organização comporta objetivos e esperas, regras de ação, tomada de informação e de controle, e é estruturada por invariantes operatórios, isto é, conhecimentos adequados para selecionar a informação e processá-la (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) (PLAISANCE e VERGNAUD, 2003, p. 66).

Diferentes tipos de esquemas são usados em situação, tais como: *perceptivo-gestuais,* como contar objetos apontando com os dedos ou agrupando unidades; *pictóricos,* como desenhar um croqui, fazer um gráfico ou um diagrama; *verbais,* como o de fazer um discurso; *sociais,* como o de seduzir outra pessoa ou o de gerenciar conflitos; e *algorítmicos,* como a execução de uma série de passos para resolver um problema.

Os invariantes operatórios, por sua vez, são os conhecimentos, os conceitos contidos nos esquemas, designados como conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Os primeiros podem ser um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante. Os segundos são proposições tidas como verdadeiras sobre o real, sendo que ambos podem se manifestar pelo discurso ou pelas ações. "Expressamos nossos conhecimentos tanto pelo que dizemos (forma predicativa) como através do que fazemos em situação (forma operatória)" (VERGNAUD, 2017, p. 19).

O aspecto provisório do conceito, em estado constante de complementação pela vivência e interação social, é outra característica da formação dos conceitos, para Vergnaud:

> A Conceitualização é, em primeiro lugar, um processo. Podemos falar da Conceitualização como resultado desse processo, mas antes de mais nada é um processo. Começa-se bem cedo o processo de Conceitualização, bem criança ainda e nunca jamais se termina. A gente acaba descobrindo aspectos que não tinha previsto. Só nos resta trabalhar outra vez, refletir de novo, repetir, também ser ajudado, auxiliado pelo outro. Trabalhar com o outro é importante (VERGNAUD, 2018, p.15).

A TCC, por detalhar a composição dos conceitos pela associação dos conjuntos S-I-R e o uso de esquemas que relacionam uns conceitos com os outros, formando o campo conceitual, viabiliza uma concepção do que vem a ser *oportunidades de aprendizagem de matemática*: são situações, momentos de vivência de escola ou da vida nos quais são formados os conceitos em si, atribuídos sentidos concretos ou imaginários e/ou representados através de um sistema de linguagem.

Os conceitos (invariante, I) e os seus respectivos sentidos (S) podem existir independentemente das representações e é o que ocorre com o conhecimento do artesão, do agricultor, enfim, da vida. A prática de construir cestos, plantar e fazer contas não carece de uma representação simbólica sintética e com regras bem definidas. O efeito da simetria (ou o cálculo da quantidade de material dos cestos) pode ser apreciado esteticamente e obtido através de tentativas de arranjos com as fibras. Independente de representação simbólica, um conceito primitivo de simetria faz parte da cultura do artesão, provavelmente associado a explicações, tais como assim está certo ou assim fica equilibrado. Na TCC, entende-se que a linguagem completa o conceito com a representação simbólica, seja na forma falada, escrita, desenhada ou através de símbolos particulares, como na matemática.

A Modelagem Matemática, do ponto de vista técnico-científico[3], pode ser entendida como um conjunto de procedimentos que visam traduzir uma situação real ou imaginária em termos da linguagem matemática. Nesse processo, faz-se necessário um recorte da situação, selecionando as variáveis e dados considerados fundamentais e passíveis de matematização para a análise, o que consiste em uma simplificação da situação real complexa, de modo a viabilizar uma representação matemática da mesma, na forma de um modelo matemático (BARBOSA, 2001). Ou seja, o processo de modelagem de objetos, fatos, processos é essencialmente um trabalho com conceitos em todas as três componentes invariantes, sentidos e representações. Esse entendimento viabilizou a

[3] A modelagem matemática é uma metodologia de pesquisa consolidada na simulação de fenômenos reais, viabilizando a compreensão e a tomada de decisões sobre problemas das Ciências e das áreas tecnológicas.

formulação do quadro de categorias de análise das situações de modelagem, descrito na próxima seção.

O objeto e o plano de pesquisa

A hipótese básica dos procedimentos de pesquisa desenvolvidos neste trabalho supõe que é possível identificar as oportunidades de aprendizagem em relatos de atividades de modelagem. Para justificar essa possibilidade é necessário entender a subjetividade inerente à pesquisa em educação e a extrapolação da pesquisa dos fatos tais como ocorreram.

Na ciência positivista a descrição do observado deve ser objetiva, de modo a elucidar a realidade passiva. Busca-se a "[...] explicação dos fenômenos através das relações dos mesmos e a exaltação da observação dos fatos, mas resulta evidente que para ligar os fatos existe necessidade de uma teoria". (Triviños, 1987, p. 34). Nessa linha, em Educação Matemática, pesquisar seria descrever com precisão o que ocorre nas salas de aula, entre os sujeitos escolares, suas interações e materiais. A pesquisa descritiva tem sua importância como recurso metodológico para entender os processos reais de ensino e de aprendizagem. A complexidade desses fenômenos tem levado ao desenvolvimento de técnicas de coleta e análise dos dados que superam a frieza do tratamento estatístico, acrescentando instrumentos de coleta de dados subjetivos, admitindo as diferenças de pontos de vista diferentes dos sujeitos sobre o mesmo objeto. Para Triviños

> A fenomenologia, sem dúvida, representa uma tendência filosófica que, entre outros méritos, parece-nos, tem o de haver questionado os conhecimentos do positivismo, elevando a importância do sujeito no processo da construção do conhecimento. Na pesquisa educacional através especialmente dos estudos de sala de aula, permitiu a discussão dos pressupostos considerados como naturais, óbvios (TRIVIÑOS, 1987, p. 47).

Com as concepções de realidade da fenomenologia e da dialética[4], a pesquisa em educação superou a pretensão da objetividade, assumiu a subjetividade e a característica dinâmica e múltipla da realidade, como pressuposto da investigação. Skovsmose vai mais além: critica a concepção neopositivista e entende "[...] que uma multiplicidade de formas de ver a realidade seja legítima e duvida que qualquer perspectiva suprema possa

[4] Uma abordagem detalhada das concepções positivista, fenomenológica e dialética da ciência da educação pode ser encontrada em Triviños (1987).

estabelecer a “objetividade”!”. (SKOVSMOSE, 2015, p. 70). Para ele, a realidade observada é apenas uma das possibilidades do que ocorreu. Qualquer detalhe em um fato, uma ação poderia ter desencadeado outros desfechos. Assim, Skovsmose propõe a pesquisa não apenas do real, do que existe, mas do que pode ser construído: “nenhuma dessas interpretações inclui o que eu tenho em mente quando falo sobre a pesquisa de possibilidades. Essa pesquisa inclui não somente um estudo de “o que é” ou “o que é construído”, mas também um estudo de “o que não é” e “o que poderia ser construído” (SKOVSMOSE, 2015, p. 70).

Pesquisar o ambiente escolar – atividades, interações sociais, materiais de ensino – como algo que pode ser construído é uma alternativa ousada de construir realidades, já que “o que poderia ter tido como certo, digamos, em termos de tradições educativas, não são necessidades de ensino, mas contingências.” (SKOVSMOSE, 2015, p. 76). Aparentemente, pode parecer uma ação alienada, quase uma fuga da realidade, já que esta pode não ser como se desejava. No entanto, imaginar possibilidades significa projetar esperanças de que o real possa ser modificado na direção das intenções, dos posicionamentos ético, estético e epistemológico. Para Skovsmose a *situação imaginada*

> [...] parece ainda mais multifacetada do que a situação atual. Podem-se imaginar tantas coisas diferentes! Não há nada definitivo sobre situações imaginárias. O melhor que se pode dizer é que elas podem ser apenas parcialmente compreendidas, dados os conceitos que estão disponíveis. Uma imaginação é vaga, é flexível, é parcial, e pode estar longe de ser realista. Situações imaginadas podem incluir esperanças e aspirações educacionais (SKOVSMOSE, 2015, p. 74).

O relato objetivo do ocorrido – próprio da pesquisa descritiva – devido à amarração da fidelidade aos fatos, deixa de sugerir possibilidades de ações dos sujeitos, como perguntas interessantes dos alunos, perguntas oportunas que o professor pode formular durante uma atividade, procedimentos matemáticos alternativos, relações entre conceitos, representações matemáticas alternativas, enfim, uma série de procedimentos que podem enriquecer o estudo de uma situação didática. Nesse sentido, uma situação arranjada, hipotética, pode gerar uma série de oportunidades de sentidos no processo de conceitualização.

> O raciocínio exploratório encontra o seu ponto de partida em uma situação arranjada. No entanto, seu objetivo não é simplesmente especificar conclusões sobre a situação arranjada. Assim, um de seus objetivos é desenvolver uma

> compreensão mais profunda da situação arranjada (SKOVSMOSE, 2015 ,p. 80).

A pesquisa de possibilidades de Skovsmose em situações de ensino dá à Educação Matemática uma alternativa de explorar atividades propondo cenários de desenvolvimento de conceito matemáticos, como é o propósito do presente trabalho, ao relatar investigações de modelagem desenvolvidas e apresentadas em um primeiro momento, na disciplina de Modelagem no Ensino da Matemática do Curso de Matemática–Licenciatura da UFFS/Chapecó, no primeiro semestre de 2018 e complementadas posteriormente, considerando perguntas do tipo: [...] *e se as fitas fossem curvas*? ou [...] *qual é a melhor função para descrever a geometria da fita curva?* Com este entendimento, o *corpus* desta pesquisa é o relato na forma de texto matemático dos dois modelos assim formulados sobre a confecção de cestos agrícolas.

Após várias leituras dos relatos dos modelos, como sugere Franco (2012, p. 54), com orientação na metodologia de Análise de Conteúdo e nas considerações sobre a TCC da seção anterior, foi sendo elaborado um quadro de categorias, que aos poucos, tomou a forma do Quadro 1.

Quadro 1 – Categorias de análise.

A – Conceitos (Invariantes, I)	1 - Matemáticos	a - Expeditos
		b - Estruturados
		c - Formalizados
	2 - Outros conceitos	a - Modelagem
		b - Culturais
B – Sentido (S)	1 - Concreto	
	2 - Abstrato	
	3 - Matemático	
C – Representações (R)	1 - Natural	
	2 - Pictórica	
	3 - Gráfica	
	4 - Matemática	
	5 - Computacional	

Fonte: os autores.

Os conceitos matemáticos expeditos (**A1a**) são aqueles cuja apropriação se dá, ao menos em um período, apenas com o objetivo de aplicação para a resolução de problemas. Podem ser noções de partes de um conceito mais amplo, cujo domínio da representação e regras operatórias sejam razoavelmente conhecidos pelo modelador. Nos conceitos estruturados (**A1b**), o modelador tem uma noção matemática abrangente das propriedades, mesmo que desconheça ou não esteja interessado na demonstração delas.

Os conceitos formalizados (**A1c**) são aqueles que o modelador tem uma experiência matemática, portanto com ciência das propriedades e suas demonstrações formais. Conceitos ou noções de outras áreas, tais como das ciências físicas (velocidade, leis de conservação) ou economia (custos, lucros), foram considerados como conceitos de modelagem (**A2a**). Conceitos do cotidiano, da prática do saber-fazer, adquiridos pela vivência no espaço familiar, comunitário ou do trabalho, arte e sociedade são conceitos chamados neste texto de culturais (**A2b**). Eles não têm uma formulação objetiva nem tampouco convergem necessariamente, para conceitos matemáticos, mas são empregados em tarefas comuns e eficientes para a comunicação.

A atribuição de sentido concreto (**B1**) é aquela que associa o conceito a um objeto físico, a uma medida, um corpo, uma quantidade envolvida no problema, tais como medidas de comprimento, fitas e cestos. Quando uma grandeza definida não é aparente fisicamente, mas mantém relação com o concreto por seus efeitos, tem-se um sentido abstrato (**B2**). É o caso de velocidade ou aceleração, por exemplo. O sentido matemático (**B3**) é desconectado dos sentidos concretos portanto, restrito ao âmbito matemático. As taxas de variação de uma variável em relação à outra são generalizadas no conceito de derivada, o qual não necessita de qualquer elemento concreto para sua formulação, apenas de outros conceitos matemáticos como função, por exemplo.

As representações simbólicas são códigos empregados para expressar os conceitos. A mais utilizada é a linguagem natural oral ou escrita (**C1**). Os desenhos e croquis são linguagens pictóricas (**C2**). Os esquemas, diagramas, fluxogramas e gráficos são linguagens gráficas (**C3**) e a expressão dos conceitos com símbolos e regras específicos da matemática constitui a linguagem formal (**C4**). A tradução dos conceitos matemáticos para códigos de programas são as representações computacionais (**C5**).

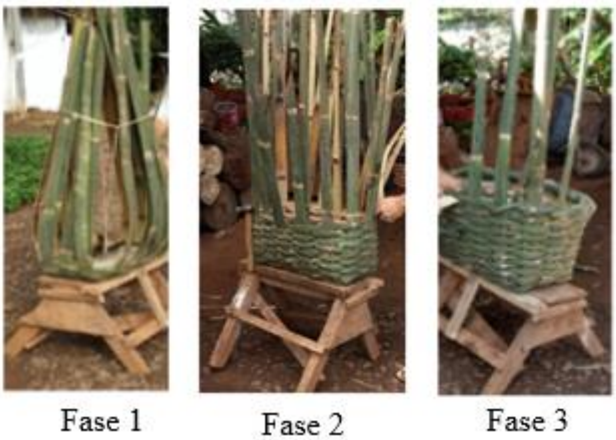
Assim, a presente pesquisa define-se como descritiva, analítica e qualitativa. É descritiva não porque relata apenas o observado, mas porque além disso, relata possibilidades de enfoques e oportunidades de aprendizagem. É analítica porque discute o relato sob a luz de uma teoria da aprendizagem e ainda, é qualitativa, porque o interesse da análise não é o número de dados ou fatos, mas sim, as suas características.

A modelagem da confecção de cestos

A descrição de dois modelos matemáticos sobre a quantidade de material necessário para a confecção dos cestos é apresentada na presente seção. A análise sobre as oportunidades de aprendizagem de matemática inerente a esse processo de modelagem, consistiu em identificar no relato, os elementos dos conceitos (assinalados em *itálico*) e as categorias do Quadro 1, supondo que tais desenvolvimentos, seriam potencialmente de construção dos conceitos. Além disso, os códigos das categorias e seus respectivos comentários foram representados entre parêntesis (**A1b,** *comentário*), junto à respectiva passagem no texto.

Os cestos confeccionados por um produtor rural (referido neste texto como "artesão") do município de Seara, Estado de Santa Catarina, são utilizados comumente para transportar produtos agrícolas, dispor alimentos em festas ou como objetos decorativos. O artesão utiliza perfis de taquara[5] para confeccionar cestos (Figura 1), *arte* que aprendeu com seu tio durante a juventude, quando ainda morava no Rio Grande do Sul, como uma das várias *ocupações dos descendentes de italianos, acostumados a construir suas próprias ferramentas e utensílios de trabalho* (**A2b**, *conceitos de cultura, etnia, arte e trabalho*).

Figura 1 – Fases da confecção dos cestos de taquara.



Fase 1 Fase 2 Fase 3

Fonte: os autores.

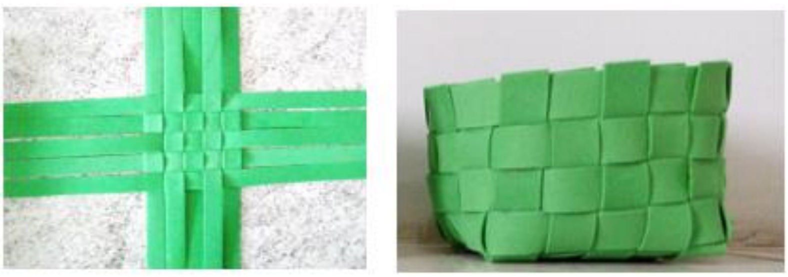
O problema proposto na modelagem foi a determinação da quantidade de material necessário para a confecção de cestos agrícolas, semelhantes àquele mostrado na Figura

[5] Os *cestos de taquara* são os mais simples e rústicos, *úteis para transportar produtos* com alguma sujeira, tais como milho, mandioca e batatas recém colhidos. O artesão também utiliza *varas de vime* em cestos, para carregar ou guardar alimentos (pães e frutas) e de *cipó descascado*, para cestos decorativos (**A2b**, *materiais e funções dos objetos*).

1, dadas as medidas da *base* e da *altura* (**A1b,** *conceitos geométricos*). Para obter *dados empíricos* (**A2a**, *técnica de modelagem*) foram confeccionados cestos em tiras de EVA[6], substituindo os perfis de taquara, inspirados no método de *confecção do artesão (***A2b**, *técnica de construção do cesto;* **B1**, *modelo físico;* **C1**, *representação concreta*), o qual consiste em três fases, conforme sugere a sequência mostrada na Figura 1. Na Fase 1, dispõem-se as tiras perpendicularmente para fazer a *base* e dobra-se em *90º* (**A1b,** *conceitos geométricos*, **B1**, *modelo físico*). Na Fase 2, entrelaçando as tiras da base com as laterais, obtêm-se as *faces verticais* (**A1b,** *conceitos geométricos*). Na Fase 3, faz-se o acabamento das bordas, tramando as tiras da base e formando as bordas do cesto. No entanto, devido às dificuldades de operação – ou talvez, por não dispor das habilidades técnicas do artesão – a terceira fase foi substituída por uma colagem das tiras da base com as laterais, como se pode observar na Figura 2b. Assim, os resultados da modelagem se referem a esses cestos simplificados, como um caso particular daqueles confeccionados pelo artesão.

As *expressões matemáticas* dos modelos foram deduzidas para casos gerais (**A1b**, *equações algébricas*) de cestos de base retangular, com medidas quaisquer.

Figura 2 – Protótipo de cesto em EVA: (a) Trançado da base (b) Vista lateral.



(a) (b)

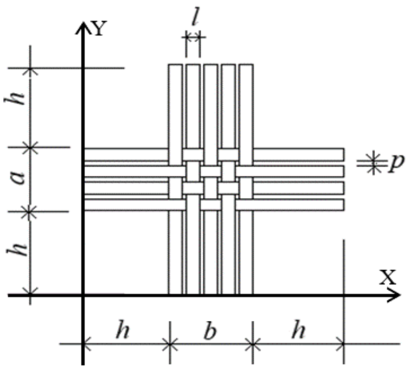
Fonte: os autores.

A *largura das fitas* de EVA foi mantida fixa para o mesmo cesto (**A1b,** *conceitos geométricos;* **B1**, *modelo físico*). Na Figura 2a observam-se as fitas da base *entrelaçadas e dispostas no plano* (**A1a,** *conceitos geométricos;* **B1**, *modelo físico;* **C1**, *representação concreta*). Na Figura 2b, as fitas da base foram dobradas e entrelaçadas com as fitas das faces (laterais). A Figura 3 é um *croqui* da Fig. 2a, (**A1b**, *definição de grandezas*; **B2**,

[6] Borracha, cuja sigla EVA é da abreviação de Etil, Vinil e Acetato.

abstração; **C3**, *desenho;* **C4**, *símbolos*) na qual estão definidas graficamente as grandezas ou variáveis dos modelos.

Figura 3 – Esquema das fitas da base (l = largura e p = distância entre as fitas)



Fonte: os autores.

Dois modelos foram elaborados para determinar o comprimento total das fitas. O Modelo I considera as fitas como retas, enquanto o Modelo II considera o entrelaçamento das fitas.

Modelo I: Fitas retas

Neste modelo, as fitas são consideradas *perfeitamente retas* e a distância entre elas é nula (*p*, na Figura 3). Com essa hipótese, *a quantidade total de material é a adição do comprimento das fitas da base com o comprimento das fitas laterais.* **(A2a**, *simplificação do real*, **A1a**, *adição de comprimentos;* **B1**, *sentido concreto (fitas)*; **C1**, *linguagem natural*).

O comprimento das fitas da base do cesto depende do número de fitas em cada direção (horizontal (b) e vertical (a) da Figura 3), da largura, do comprimento e da altura do cesto. Assim, o *comprimento das fitas da base*, pode ser calculado pela Equação (1). (**A1a e A1b**, *variáveis, constante e equação*; **B1**, *sentido concreto (comprimento de fitas);* **B2,** *abstração do real para expressão;* **B3**, *operações matemáticas*; **C4**, *linguagem matemática)*

$$C_B = C_x \cdot n_x + C_y \cdot n_y \tag{1}$$

Onde C_B é o comprimento das fitas da base (*cm*), C_x é o comprimento das fitas na direção *X* (*cm*), C_y é o comprimento das fitas na direção *Y* (*cm*), n_x é o número de fitas na direção X (cm), sendo $n_x = a/l$, l é a largura das fitas (cm) e n_y é o número de fitas na direção Y (cm), sendo $n_y = b/l$ e a e b são as dimensões da base, conforme ilustrado na Figura 3.

Pela análise da Figura 3, $C_x = 2h + b$ e $C_y = 2h + a$. Substituindo essas equações na Equação (1) e agrupando os termos semelhantes, obtém-se a Equação (2).

$$C_B = \frac{2}{l}[h(a+b)+ab] \tag{2}$$

O comprimento das fitas laterais pode ser calculado pela Equação (3).

$$C_H = C_h \cdot n_h \tag{3}$$

Onde C_H é o comprimento das fitas laterais (cm), C_h é o comprimento de uma das fitas laterais (cm) e n_h é o número de fitas laterais (cm), sendo $n_h = h/l$.

Pela análise da Figura 3, $C_H = 2(a+b)$. Substituindo essa equação na Equação (3) e agrupando os termos semelhantes, obtém-se a Equação (4).

$$C_H = \frac{2h}{l}(a+b) \tag{4}$$

Assim, a quantidade necessária de *material para todo o cesto* é dada pela adição das Equações (2) e (4), mostrada na Equação (5). (**A1c**, *dedução da equação;* **B2**, *abstração do real para a expressão;* e **B3**, *operações matemáticas*; **C4**, *linguagem matemática*)

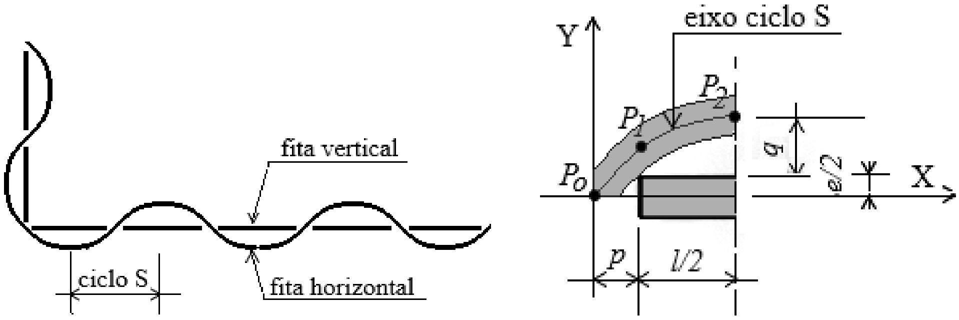
$$C_T = \frac{2}{l}[h(a+b)+ab] + \frac{2h}{l}(a+b) = \frac{2}{l}[2h(a+b)+ab] \tag{5}$$

Onde C_T é o comprimento total das fitas (cm).

Modelo II – Fitas curvas

O Modelo II considera a curvatura das fitas conforme ilustrado na Figura 4. Para determinar o comprimento curvo das fitas, será considerado o ciclo de comprimento S, mostrado na Figura 4a. Com base nessa figura, é fácil observar que *o número de ciclos em uma dada direção, é igual ao número de fitas na direção perpendicular* (fitas verticais, na Figura 4a pois cada ciclo S corresponde, em linha reta, a duas metades da largura de cada fita (**A1c**, *indução de propriedade*; **B2**, *abstração;* **C3**, *desenho;* **C4**, *símbolos*). Assim, $n_S = n_f$, onde n_S é o número de ciclos *S* e n_f é o número de fitas na direção perpendicular à fita de *S*.

Figura 4 - Ciclos curvos *S*



(a) (b)

Fonte: os autores.

A curva *S* foi considerada como o eixo central da fita curva (ver Figura 4b) e representada por uma *função potência*, a Equação (6) (**A1b,** *função*; **B2** e **B3,** *sentido real e matemático;* **C4,** *símbolos matemáticos*). Essa escolha deve-se à forma em "S" dessa função, que é semelhante ao desenho da fita curva e possui dois parâmetros, já que para determiná-los se dispõe de três pontos, sendo um a origem. A distância *p* na Figura 4b é a distância entre as fitas perpendiculares à curva *S*. (**A1b,** *função*; **B3,** *sentido matemático;* **C4,** *símbolos matemáticos*).

$$F(x) = m_1 x^r + m_2 x \tag{6}$$

Onde *F* é a função (*cm*), m_1 e m_2 são coeficientes reais, *r* é um número real positivo, tal que $0 < r < 1$ e *x* é a variável espacial na direção da fita (*cm*).

Se as fitas forem de *material rígido incompressível*, *2p deveria ser maior do que a espessura da fita*. Portanto, no caso do material EVA, o qual é elástico e compressível, *2p* pode ser bem menor do que a espessura da fita *e* (verificar Figura 4b) como pode-se observar nos cestos da Fig. 2, em que as fitas perpendiculares a *S* estão muito próximas (**A2a**, *conceitos físicos*; **B1** e **B2,** *interpretação do real com a teoria;* **C1** e **C4,** *representação matemática*). A distância *q*, também depende da rigidez do material e é mínima, podendo ser considerada menor do que a espessura da fita. Assim, as distâncias *p* e *q* dependem de propriedades do material das fitas (particularmente, da compressibilidade e da flexibilidade). A medição precisa dessas distâncias torna-se difícil, por serem frações de milímetros e pela variabilidade das mesmas a cada ciclo *S*. Por esse motivo, foram empregados, além da geometria da Figura 4, critérios não objetivos (**A2a,** *simplificações*), como estimativas de frações da espessura. Assim, devido à compressibilidade e à flexibilidade do EVA, foram adotados $p = e/3$ e $q = e/10$. Além disso, a ordenada do ponto P_1, foi estimada em $y_1 = 0{,}54e$ (**A2a**, *simplificações;* **B1** e **B2,** *interpretação do real com a teoria;* **C1** e **C4,** *representação matemática*) devido à compressão do material, na medida em que as fitas são esticadas. A Tabela1 apresenta as coordenadas geométricas dos pontos e as adaptações descritas, considerando as propriedades físicas do material.

Tabela 1 – Pontos e coeficientes da função *F* (*p=e/3 e q=e/10*)

	Coordenadas geométricas		Coordenadas adaptadas		Parâmetros		Expoente
P	*x*	*y*	*x*	*y*	m_1	m_2	*r*
0	0	0	0	0			
1	*p*	*e*	*e/3*	*0,54e*			
2	*p+l/2*	*e/2+ q*	*(2e+3l)/6*	*e/5*	0,1276	- 0,00763	0,06

Fonte: os autores.

Os *parâmetros* m_1 e m_2 da função potência, por sua vez, podem ser determinados por *ajuste linear* (**A1b**, *conceitos matemáticos;* **B3**, *sentido matemático;* **C4,** *representação matemática*). Independentemente dos valores desses parâmetros, *F* passará em P_o. Substituindo as coordenadas adaptadas de P_1 e P_2 (ver Tabela 1) na Equação (6), obtém-se o sistema linear mostrado na Equação (7), cujas incógnitas são os referidos parâmetros.

$$\begin{pmatrix} x_1^r & x_1 \\ x_2^r & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Onde a primeira matriz é a dos coeficientes, a segunda, a das incógnitas e a terceira, a dos termos independentes.

A matriz dos coeficientes *não é singular (pois* $x_1 \neq x_2$*);* portanto, possui inversa e, *com isso, o sistema tem solução única* (**A1c,** *argumentação***; B3***, sentido matemático;* **C4,** *representação matemática*). *A solução do sistema foi obtida* multiplicando-se ambos os lados da Equação (7) pela matriz inversa da matriz dos coeficientes, obtendo-se o vetor com os coeficientes m_1 *e* m_2, cujos resultados são mostrados na Tabela 1. (**A1b**, *operações matemáticas;* **B3***, sentido matemático;* **C4,** *representação matemática*)

O comprimento de *S* poderia ser determinado por integração, com base na teoria sobre o comprimento do arco de uma curva, como ensina-se no cálculo integral. No entanto, a função *F* escolhida gera uma integral de difícil solução analítica. Por esse motivo, foi *implementada uma solução aproximada*, dividindo o intervalo ($0,x_2$) em 10 segmentos, calculando os respectivos valores $F(x_i)$, $i=0,1,2,3,...,10$ com a Equação (6) e o comprimento *S*, através da Equação (8). (**A1b**, *operações matemáticas;* **B3***, sentido matemático;* **C4,** *representação matemática*)

$$S = 2\sum_{i=0}^{9}\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} \tag{8}$$

Analisando a Figura 3 e retomando a afirmação de que o número de ciclos *S* é igual ao número de fitas na direção perpendicular, *pode-se concluir, que o comprimento das fitas da base em uma dada direção é o produto do comprimento dos ciclos S de uma fita, pelo número de fitas naquela direção,* como apresenta-se na Equação (9) para as direções vertical e horizontal. (**A1c**, *dedução da equação***; B2,** *abstração do real* e **B3**, *operações matemáticas***; C4**, *linguagem matemática*)

$$CII_B = S \cdot n_{Sx} \cdot n_x + S \cdot n_{Sy} \cdot n_y = S(n_{Sx} \cdot n_x + n_{Sy} \cdot n_y) \tag{9}$$

Onde CII_B é o comprimento das fitas da base, n_{Sx} é o número de ciclos *S* na direção *X*, com $n_{Sx} = (2h+b)/l$, n_x é o número de fitas na direção *X*, n_{Sy} é o número de ciclos *S* na direção *Y* , $n_{Sy} = (2h+a)/l$ e n_y é o número de fitas na direção *Y*.

O comprimento das fitas laterais segue o mesmo raciocínio do cálculo do comprimento das fitas da base. A Equação (10) apresenta o comprimento das fitas. (**A1c**, *dedução da equação*; **B2,** *abstração do real* e **B3**, *operações matemáticas*; **C4**, *linguagem matemática*)

$$CII_H = 2(n_x \cdot S + n_y \cdot S) \cdot n_h = \frac{2Sh}{l^2}(a+b) \quad (10)$$

Onde CII_H é o comprimento das fitas laterais (*cm*) e n_h é o número de fitas laterais.

Assim, o comprimento total das fitas para o Modelo II é dado pela adição das Equações (9) e (10), cuja expressão resultante é a Equação (11). (**A1c**, *dedução da equação*; **B3**, *operações matemáticas*; **C4**, *linguagem matemática*)

$$CII = S\left(n_{Sx} \cdot n_x + n_{Sy} \cdot n_y + \frac{2h}{l^2}(a+b)\right) \quad (11)$$

Validação dos modelos

Para testar empiricamente os modelos, foram *construídos quatro protótipos de cestos* de base quadrada, de *diferentes tamanhos*, com 2, 3, 4 e 5 fitas na base (**A2a**, *técnica de modelagem;* **B1**, *modelo físico;* **C1**, *imagem natural*) e medido o comprimento total de fitas de cada tamanho de cesto, cujos resultados estão na segunda linha (Experimental) da Tabela 2.

Figura 5 – Cestos confeccionados em EVA

Fonte: os autores.

As equações dos dois modelos foram implementadas em uma planilha eletrônica e em um programa SCILAB, na forma de um algoritmo, no qual os dados de entrada são as dimensões da base (*a* e *b*) e altura (*h*), a largura (*l*), a espessura (e) e as estimativas para as distâncias *p* e *q* (**A1b,** *equações;* **B3**, *sentido matemático*; **C5**, *representação computacional*). Com esses dados e as equações descritas nas seções anteriores, os comprimentos totais de fitas foram calculados, para as respectivas medidas dos cestos confeccionados. Os resultados são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Comprimento de total de fitas (medidas em cm)

Modelos	Cesto 1 2 fitas	Cesto 2 3 fitas	Cesto 3 4 fitas	Cesto 4 5 fitas	Diferença % média
Experimental	156,5	246,6	323	469	0
Modelo I	144	228	320	420	
Diferença MI (%)	-7,98	-7,54	-0,92	-10,44	-6,72
Modelo II	160,41	253,96	356,45	467,84	
Diferença MII (%)	+2,49	+2,98	+10,35	- 0,24	+4,015

Fonte: os autores.

Pelas hipóteses consideradas nos modelos*, era esperado que o comprimento total das fitas do MI fosse menor do que ambos, o experimental e o MII,* já que no modelo MI não são consideradas as curvaturas dos entrelaçamentos das fitas, o que de fato ocorreu. (**A1b**, *vários conceitos;* **B1, B2** e **B3**, *discussão do sentido dos resultados;* **C4**, *em linguagem natural*).

A efetiva aproximação entre os modelos MII e o experimental deve-se à possibilidade de ajustar as distâncias *p* e *q*. Pequenos ajustes nessas distâncias resultam em pequenas diferenças em *S*, porém, como esse ciclo é repetido a cada transpasse de fitas, implicam em diferenças significativas no comprimento total. Dessa forma, *p* e *q* comportam-se, no Modelo II, como parâmetros de ajuste e adaptação do modelo às propriedades físicas do material das fitas. Para os cestos de perfis de taquara, confeccionados pelo artesão, esses parâmetros são diferentes dos considerados para o EVA, pois a taquara é menos compressível e flexível do que a borracha. Para aquela fibra, *p* e *q* serão maiores do que para a borracha. (**A1b**, *vários conceitos físicos e matemáticos;* **B1, B2** e **B3**, *discussão do sentido dos resultados;* **C4**, *em linguagem natural*).

O Modelo II tem resultados mais próximos do experimental do que o Modelo I, exceto para o cesto de quatro fitas (ver quarta coluna da Tabela 2). Na imagem desse cesto na Figura 5, percebe-se que ele é mais alto que os demais, devido ao maior espaçamento entre as fitas horizontais laterais, o que provoca uma linearização do ciclo *S*, aproximando seu comprimento à abscissa do ponto P_2 e consequentemente, do comprimento total de fitas do MI. (**A1b**, *vários conceitos;* **B1, B2** e **B3**, *discussão do sentido dos resultados;* **C4**, *em linguagem natural*).

A modelagem de cestos e as possibilidades de aprendizagem de matemática

O cálculo do comprimento total de fitas necessário para a confecção do cesto, provavelmente seria resolvido pelos alunos, para um cesto específico de dimensões conhecidas. Esse tipo de solução não deixa de ser modelagem e seria bem adequada até o sétimo ano do Ensino Fundamental. Porém, a solução para cestos com quaisquer medidas é uma generalização própria da Álgebra e da Modelagem. Aprender a elaborá-las é aprender os métodos matemáticos (**A2a**). Nessas situações faz-se necessária a mediação do professor, propondo uma maneira genérica de resolver problemas práticos, que, nesse caso, trouxe consigo os conceitos de variáveis e equações (**A1a**), com suas representações simbólicas (**C4**). A modelagem proporcionou a conexão entre o conceito e a sua representação, através do sentido concreto do problema. As equações foram elaboradas a partir de uma constatação concreta (adição de comprimentos). Esse é o sentido **B1**. O trabalho algébrico com as expressões tem um sentido interno à matemática, são abstratos (**B2**). Assim, a primeira possibilidade de aprendizagem que a experiência proporcionou foi a resolução do problema, não apenas para um cesto, mas de modo genérico para qualquer cesto de base retangular. Trata-se da aprendizagem de um método algébrico.

As hipóteses de modelagem consideradas no Modelo I exigiram o uso de elementos de vários campos conceituais, relacionados entre si: números naturais, racionais e suas operações, medidas de comprimento (centímetro e milímetro), noções de projeções de três para duas dimensões, expressões algébricas (monômios, operações de adição e multiplicação, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, fatoração com fator comum) e noções de função. A aplicação desses conteúdos é predominante expedita (**A1a**). Nesse caso, ocorre uma simples aplicação de matemática para resolver o problema prático, sem preocupações com demonstrações. Cada expressão teve um sentido real (**B1**) (número e comprimento das fitas, por exemplo) devidamente representado por símbolos, expressões e finalmente por equações (**C1, C2, C3, C4**), completando assim o tripleto S-I-R da TCC.

O processo de matematização desenvolvido, da atribuição de nomes às variáveis na Figura 3 até a Equação (5) é repleto de aplicações integradas dos conteúdos mencionados, que constituem oportunidades de aprendizagem, porque exercitam os conceitos (**A1a, A1b**) com novos sentidos (**B1, B2**). Situação diferente ocorre quando os conceitos não são dominados ou até são desconhecidos. Nesse caso, a modelagem é interrompida, e buscam-se outras fontes tais como livros didáticos, vídeos, ou uma boa aula expositiva. É outro momento de mediação do professor. Após esse estudo, geralmente estruturado (**A1b**), a volta para o modelo dará sentido (**B1 ou B2**) para o conceito aprendido. Observa-se que nesse movimento em busca do conhecimento, pela motivação da modelagem, os aspectos formais (**A1c**) não estão muito presentes, assim como a preocupação de esgotar o ensino do conceito e de todas as suas propriedades (**A1b**). Esses complementos matemáticos, necessários do ponto de vista de uma formação clássica, poderão ser implementados posteriormente, de acordo com os objetivos educacionais do professor.

O Modelo II envolve todos os conceitos do Modelo I e mais alguns outros. A expressão da curvatura das fitas com os entrelaçamentos, por exemplo, levou ao emprego de um tipo de função pouco usual, a função potência de expoente fracionário (Equação (6)) (**A1b, B1**), ao conceito de interpolação (**A1b, B3**) e a um método para determinar seus coeficientes, o qual usa os sistemas lineares da Álgebra Linear (**A1b, B3**). Essa solução, é rica em conceitos e técnicas matemáticas e particularmente diferente das abordagens do estudo de funções, visto que o foco não está apenas em fazer gráficos e calcular raízes, mas em determinar uma função que passa em três pontos (**B3**).

O comprimento do ciclo *S*, devido à função escolhida, ficou inviável de ser obtido analiticamente por integração, pela fórmula do comprimento de arco, devido à complexidade do integrando (**A1b, A1c, B1, B2, C4**). Uma solução numérica poderia ter sido implementada (**A1b, B3, C4**). Seria uma possibilidade, para uma aula de Cálculo Numérico ou de Cálculo Integral (**A1b, B3, C4**). A alternativa executada utilizou a equação da Geometria Analítica da distância entre dois pontos e a ideia básica do Cálculo, de que se as partições delta *X* tenderem a zero ($\Delta x \to 0$), a soma das distâncias entre os pontos tenderá ao comprimento curvo do ciclo *S* (**A1b, B3, C4**). Novamente, destaca-se a contribuição da modelagem como aplicação integrada de conceitos, atribuindo sentido concreto e matemático (**B1, B2**) e ampliando os campos conceituais dos conceitos envolvidos.

A implementação computacional dos modelos foi imperativa, devido ao volume de cálculos e à sintonia dos ambientes algébrico e computacional, consistindo em oportunidade de aprendizagem de programação (**A1b, B2, C4, C5**). A praticidade para efetuar simulações torna o trabalho compensador: basta entrar com as medidas do cesto (*a, b, h, e* e *p*) e o programa faz todas as operações previstas nos modelos.

Nas atividades analisadas, percebe-se que a modelagem é envolvida em, ao menos, três tipos de momentos de aprendizagem:

1º) *Aplicação simples* (**B1, A1a, C4**): o problema de modelagem gera a demanda de conceitos, todos conhecidos e sua aplicação é imediata. Poderia ser o caso de sistemas de medidas no Modelo I – dentre outros, tais como expressões algébricas, fatoração, etc. Assim, ainda que a modelagem dê um sentido mais amplo à prática da medida, principalmente com relação à precisão, o campo conceitual permaneceria praticamente o mesmo.

2º) *Aplicação com complementos de estudos* (**B1, A1b, B2, C4**): o problema de modelagem gera a demanda de conceitos, conhecidos apenas parcialmente, havendo necessidade de novas informações. Como exemplo, a função potência, no Modelo II, faz parte do conceito de função, mas poderia não ser conhecida. Um breve estudo do gráfico foi suficiente para transformar um *conceito em ação* em *teorema em ação*, na linguagem de Vergnaud. O campo conceitual de funções foi ampliado, com um conceito novo e suas propriedades (**A1b**), significado físico (**B1**) e uma nova representação simbólica (**C4**). Para alguns alunos, talvez a função potência tenha ficado apenas com um sentido associado àquelas curvas e estas à confecção de cestos. Novas experiências poderão ampliar o campo conceitual dessas funções, acrescentando novos sentidos ou aprofundando aspectos matemáticos.

3º) *Aplicação-estruturação-argumentação-aplicação* (**B1, B3, A1b, A1c, C4**): o problema de modelagem gera a demanda de conceitos, que, por sua vez, geram investigações de questões matemáticas. Ao menos, duas situações poderiam ocorrer no Modelo II: 1ª) Na determinação do número de ciclos *S* (**B1**) ocorre uma investigação simples, mas que precisa de uma argumentação (**A1c**). Porque $n_S = n_f$? Uma justificativa com desenhos de casos particulares (**C1, C2**) poderia satisfazer a curiosidade, mas o uso de símbolos (**C4**) a tornaria genérica. 2ª) Na determinação dos parâmetros da função potência (**B2**) afirma-se que a matriz dos coeficientes não é singular. A argumentação pode ser com o exame de casos particulares (**C1, C4**), mas também pode inclinar-se na direção dos conceitos de dependência linear (**C4**) das linhas da matriz dos coeficientes. Ambos os exemplos são oportunidades de aprendizagem gerados pela modelagem, mas que podem convergir para investigações da verdade das proposições matemáticas, mesmo que, não necessariamente formais, mas simbólicos e argumentativos. Uma vez que a verdade das propriedades seja aceita, a propriedade pode ser empregada no modelo com segurança.

Além da aprendizagem de conceitos matemáticos, outros podem ser aprendidos com a investigação do real. A categoria de análise **A2** abriga os conceitos inerentes às práticas de modelagem e de noções culturais, presentes no início e no final da descrição dos modelos, como o leitor pode observar na seção anterior, nos trechos assinalados com os códigos **A2a** e **A2b**, respectivamente. Nas etapas iniciais da modelagem, a escolha de parte do real é necessária para que a expressão matemática se viabilize. Na etapa final, a validação do modelo retoma os sentidos concretos para verificar qual modelo se aproxima mais do resultado empírico.

Tanto a delimitação do real, quanto a prática de discutir a validade do modelo são oportunidades de aprendizagem, de níveis diferentes de complexidade e representação simbólica, dos vários conceitos envolvidos. O próprio conceito de cultura seria transformado na atividade. Provavelmente, os alunos não atribuam valor cultural a simples cestos e, talvez, ainda não tenham observado que existem vários tipos, com diferentes materiais e técnicas de confecção. Entretanto, depois de observar, ler e conversar sobre eles, entenderão o sentido desses objetos no ambiente de trabalho, em casa e na sociedade, como atividade de artesanato e, consequentemente, como um objeto cultural.

Considerações finais

A análise proposta teve apoio na hipótese de identificação de oportunidades de aprendizagem em um relato matemático de modelagem que poderiam ter ocorrido, ou ainda, que possam vir a se efetivar em experiências futuras, como proposto em Skovsmose (2015). De fato, a experiência relatada mostrou a coerência da hipótese, conforme os apontamentos da seção anterior, as quais viabilizaram as seguintes considerações acerca das contribuições à aprendizagem de matemática com modelagem:

1. Sobre a investigação e a geração de conceitos na modelagem:

A experiência mostrou-se uma oportunidade rica para aprender a investigar com modelagem, visto que todas as etapas[7] foram executadas e produziram modelos não apenas para um, mas para qualquer cesto de base retangular, com resultados próximos e coerentes com suas hipóteses. O processo de modelagem em si gerou conceitos próprios do problema dos cestos, relacionados ao conceito de fita: largura, comprimento, espaçamento, espessura e comprimento total de fitas. Esses conceitos e suas relações viabilizaram a solução do problema de modelagem e envolveram conceitos matemáticos (números, operações, expressões algébricas, equações e funções) para sua definição. As equações 2, 4 e 5 e suas variáveis do Modelo I são exemplos de representações desses conceitos, os quais estabelecem o vínculo entre os sentidos (fitas, cestos) e a formulação matemática (representação simbólica). A elaboração deles requisitou conceitos matemáticos conhecidos as vezes parcialmente pelos alunos, que podem completar-se, ou ao menos expandir o nível de compreensão, no decorrer do processo de modelagem. Dessa forma, a modelagem não é apenas uma aplicação de algoritmos matemáticos, mas um processo investigativo que gera conceitos sobre o real e ao empregar elementos de matemática, potencializa a aprendizagem desses.

2. Sobre a aprendizagem de Matemática com modelagem:

Ficou evidente na descrição dos modelos que as aprendizagens oportunizadas pela modelagem, predominantemente, são expeditas em um primeiro momento, porque objetivam a resolução de problemas, com rapidez, presteza e eficiência. Durante a resolução de um problema, em geral, atem-se ao sentido do conceito (as vezes de forma precária), sua representação simbólica, algumas propriedades e usa-se essa fração do campo conceitual de acordo com as necessidades do problema. O ensino escolar de matemática, no entanto, não se restringe às práticas da modelagem e inclui, certamente, enfoques estruturados e formalizações, que podem coexistir com a modelagem na mesma aula, ou em momentos distintos. Admitir essa possibilidade não significa uma didática eclética e difusa, a ponto de confundir os alunos. Aplicações, argumentações e

[7] As etapas (ou fases) de identificação do problema, simplificação, matematização, resultados matemáticos e validação são consensuais na literatura (Bassanezi, 2002, p. 27; Biembengut e Hein, 2000, p. 13; Almeida, Silva e Vertuan, 2016, p. 19).

DOI 10.36661/2596-318X.2020v2n2.11967

demonstrações são faces da mesma Matemática coexistentes nos momentos de aprendizagem descritos na seção anterior.

Em ambos os modelos foram utilizados vários conceitos de aritmética, geometria e álgebra relacionados na seção anterior, de forma integrada. Os elos da integração são os sentidos deles nos problemas. O uso de números racionais para expressar as medidas, a representação do comprimento total das fitas na forma de equação algébrica são procedimentos de solução do mesmo problema, cujos sentidos são específicos do problema dos cestos. Em uma primeira análise se poderia concluir que a atribuição de sentido para os conceitos foi a contribuição da modelagem para a formação dos conceitos de números naturais e racionais, de medidas de comprimento e expressões algébricas. Porém, a retomada, exercício ou o estudo dos conceitos e sua representação também ocorreram durante a modelagem, completando os três componentes dos conceitos (S-I-R), delineados por Vergnaud. Isso está de acordo com a ideia de que os conceitos são formados ao longo do tempo, com a atribuição de diferentes significações e representações simbólicas: "o significado de um conceito é enriquecido a partir do encontro de diferentes contextos (sejam estes modos representacionais ou, em sentido mais amplo, como situações diversas) e a partir da intersecção e confluência de formas representacionais." (BONI *et al*, 2018, p. 87). Nesse sentido, quanto mais diversificadas forem as experiências vivenciadas pelos alunos, maiores serão as chances de ampliar os campos conceituais dos conteúdos escolares. Certamente, essa é uma das principais contribuições da modelagem, como recurso para o ensino da Matemática.

A modelagem ainda carece de estudos que explicitem os processos de aprendizagem de conceitos matemáticos. Esse texto é uma tentativa de mostrar como tais processos ocorreram (ou poderiam ter ocorrido) em um caso particular. Contribuições futuras nesse sentido, poderiam descrever e analisar como ocorrem na prática escolar, as conexões entre os estudos expeditos da modelagem e a formalização matemática dos conceitos e suas propriedades, nos três tipos de momentos de aprendizagem mencionados na seção anterior.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L.M.W.; SILVA, K.P.; VERTUAN, R.E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo, Contexto, 2016.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo, Contexto, 2002.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 268f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Modelagem e competências matemáticas: uma investigação com professores em formação continuada. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 130-144, 2014.

BONI, K.T.; LABURÚ, C.E.; CARMARGO FILHO, P.S. A teoria dos campos conceituais e a diversidade representacional: leituras convergentes para a educação matemática e científica. VIDYA. Santa Maria (RS), v. 38, n. 1, p. 75-90, 2018.

FRANCO, M.L.P.P.B. **Análise de conteúdo**. Brasília: Liber Livro, 2012.

LEVY, L.F. Pode-se aprender matemática através da investigação de casos particulares? **Alexandria**, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis/SC, v. 9, n. 2, p. 287-301, 2016.

PLAISANCE**,** E.; VERGNAUD, G. **As ciências da educação.** São Paulo: Edições Loyola, 2003.

MOREIRA, M.A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**. V7(1), p. 7-29, 2002.

ROSA, M.; OREY, D.C. A Modelagem como um Ambiente de Aprendizagem para a Conversão do Conhecimento. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 261-290, 2012.

SKOVSMOSE, O. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D'AMBRÓSIO, B. S.; LOPES, C.E. (Org). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas/SP: Mercado de Letras, 2015. p. 63–90.

TRIVIÑOS, A.N.S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VERGNAUD, G.; MOREIRA, M.A.; GROSSI, E.P. (Org). **O que é aprender***?* O iceberg da conceitualização. Teoria dos campos conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERGNAUD, G. Conceitualização e Simbolização. In: III Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais. **Anais**... Brasília, DF: Universidade Católica de Brasília, 2018, p. 1-139.