EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS:
Pesquisa em Educação Matemática

CONTRIBUIÇÕES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE SOMA DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

PROBLEM SOLVING METHODOLOGY'S CONTRIBUTIONS TO UNDERSTAND SUM OF GEOMETRIC PROGRESSION'S CONCEPT

Charles Bruno da Silva Melo[1]

Eleni Bisognin[2]

Resumo

Neste trabalho, são relatados resultados de uma pesquisa que teve como propósito investigar as contribuições da Metodologia da Resolução de Problemas para os processos de ensino e aprendizagem da soma dos termos de uma progressão geométrica. A pesquisa, de cunho qualitativo, teve como participantes alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Candelária, RS, e foram utilizados, como instrumentos de coleta de dados, o diário de campo do professor e os registros escritos dos alunos. As atividades em sala de aula seguiram os passos da Metodologia de Ensino Através da Resolução de Problemas, de Onuchic e Allevato (2009), tendo como referencial a Teoria de Imagem de Conceito e Definição de Conceito, de Tall e Vinner (1981). Da análise dos resultados, pode-se inferir que essa metodologia contribuiu para o aumento da capacidade de argumentação, o estabelecimento de relações entre as situações e representações matemáticas, a aprendizagem dos alunos a partir dos erros e acertos analisados na plenária e um trabalho colaborativo.

Palavras-Chave: Soma dos termos de uma Progressão Geométrica; Resolução de Problemas; Imagem de Conceito; Definição de Conceito; Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Abstract

This activity has the objective to display the results of a research, which had the intention to investigate the contribuitions provided by the Problem Solving Methodology to determinate the sum of terms in a geometric progression. The qualitative research involved second year High School students from a public school in the city of Candelaria, RS, and the teacher's field journal, as well as the student's written records were used as collection instruments.The activities in the classroom followed the steps of the Onuchic and Allevato's Teaching Methodology Trought Problem Solving (2009), using, as reference Tall and Vinner's theory of Concept Image and Concept Definition (1981). Analyzing the results, it is possible to understand that this methodology helped to increase the argumentation capability, establish relations between mathematical situations and representations, student's learning from the mistakes and successes analysed in the plenary and a collaborative work.

Keywords: Sum of terms in a Geometric Progression; Problem Solving; Concept Image; Concept Definition; Mathematical Learning and Teaching.

[1] Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) e professor na Educação Básica. E-mail: xarlesdemelo@yahoo.com.br.

[2] Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN). E-mail: eleni.bisognin@gmail.com.

Introdução

Neste trabalho, são apresentados resultados de uma pesquisa qualitativa, cujo propósito foi investigar as contribuições que a Metodologia de Ensino Através da Resolução de Problemas oferece para os processos de ensino e aprendizagem em relação à construção de expressões para a soma dos termos de uma progressão geométrica.

A escolha do tema baseou-se na vivência de sala de aula, pois normalmente os alunos apresentam dificuldades relacionadas a esse conteúdo. Isso se dá porque, geralmente, esse tópico é desenvolvido de forma estanque, engessado numa visão puramente técnica e mecanicista, sem a preocupação com o pensar matemático.

Além disso, a soma dos termos de uma progressão geométrica é por muitas vezes ensinada pelos professores no formato de definições, exemplos e exercícios, em que o aluno apenas memoriza fórmulas da mesma maneira que é registrada nos livros didáticos.

Neste trabalho, procurou-se oportunizar aos alunos situações-problema para construção de imagens de conceito sobre a soma dos termos de uma progressão geométrica, tendo como referencial a teoria de Tall e Vinner (1981). Como metodologia de ensino, para o desenvolvimento das atividades, foi utilizada a Resolução de Problemas, para possibilitar ao aluno construir o pensamento matemático por meio da experimentação, da observação, do questionamento e da própria reflexão de forma colaborativa com os colegas.

Para isso, foi realizada uma experiência de ensino com alunos de uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Candelária/RS, na qual o primeiro autor atua como professor.

Metodologia de Ensino Através da Resolução de Problemas

A atividade de solucionar problemas sempre esteve relacionada historicamente ao desenvolvimento da humanidade. Dessa forma, aplica-se a diversas áreas. Porém, somente nas últimas décadas, vem sendo empregada pelos educadores matemáticos.

> Problemas têm ocupado um lugar central no currículo da matemática escolar desde a Antiguidade, mas resolução de problemas não. Somente recentemente, educadores matemáticos têm aceitado a ideia de que o desenvolvimento de habilidades em resolver problemas merece atenção especial (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 1).

A prática de utilizar problemas no currículo escolar pode ser encontrada nas antigas civilizações, como a babilônica, a egípcia e a grega. Corroborando ainda com Stanic e Kilpatrick (1989, p. 8), desde Platão tem-se a ideia de que, estudando Matemática, aprimora-se a capacidade de pensar, de raciocinar e de resolver problemas do mundo real. Para os autores, os problemas foram um elemento do currículo que contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio.

No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) aborda a resolução de problemas em diversas partes do documento. Existem inserções na enunciação das competências gerais e nas competências específicas a serem desenvolvidas. Na segunda competência geral, aparece o termo *resolver problemas*, que está ligado a uma concepção de "preparar" o aluno para resolver problemas diante das diferentes situações e contextos das ciências. Nas competências específicas de Matemática, a resolução de problemas está voltada à perspectiva de aprender matemática para resolver problemas, e não resolver problemas para aprender matemática:

> [...] assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (BRASIL, 2018, p. 263).

É possível encontrar no documento uma referência da abordagem com a resolução de problemas como recurso para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 264).

A importância dessa estratégia de ensino para desenvolver o conhecimento matemático é evidenciada pelo número de teses e dissertações defendidas no ano de 2019: um total de 43, de acordo com levantamento feito em dezembro de 2020, no banco de teses e dissertações da CAPES.

De acordo com Amado, Carreira e Jones (2018), a resolução de problemas continua sendo um dos focos mais importantes para a Matemática. Esse destaque ocorre, principalmente, a partir da utilização dessa perspectiva na principal avaliação em larga escala do mundo, o PISA, que vem explorando diferentes facetas da resolução de problemas, como interdisciplinaridade, habilidades criativas e trabalho colaborativo em suas avaliações.

A partir dessas concepções, Onuchic e Allevato (2009) usam para o trabalho em sala de aula a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas. Para isso, apresentam nove etapas para organizar as atividades ao colocar em prática essa metodologia: selecionar e/ou criar um problema visando à construção de um novo conceito; leitura do problema individualmente; leitura em conjunto do problema; os alunos buscam resolver o problema; observar e incentivar por parte do professor; explanação na lousa das respostas dos alunos; plenária; busca do consenso sobre o resultado correto; formalização do conteúdo pelo professor.

Assim, o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de um conteúdo matemático inicia com um problema que apresenta aspectos-chave e técnicas matemáticas que devem ser desenvolvidas na busca por respostas. A avaliação do conhecimento dos alunos é feita continuamente durante a resolução do problema.

A Metodologia de Ensino Através da Resolução de Problemas também possibilita que os estudantes sejam investigadores perante uma situação, um problema, de forma a compreender e questionar.

> Os alunos investigam quando buscam, usando seus conhecimentos já construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução (ONUCHIC, 2008, p. 83).

A utilização dessa metodologia vai ao encontro das competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) para o que se espera do aluno, cujos objetivos são: compreender os conceitos, procedimento e estratégias matemáticas; aplicar seus conceitos matemáticos a situações diversas; analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes; desenvolver a capacidade de raciocínio e resolução de problemas; utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas; expressar-se oral escrita e graficamente em situações; estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos; reconhecer representações diferentes de um mesmo conceito e o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Essa metodologia gera o debate, a interação e a descoberta por parte do aluno, sem que ele seja refém de fórmulas e soluções sugeridas pelo professor, desenvolvendo uma aprendizagem com significado.

Imagem de Conceito e Definição de Conceito

Os termos "imagem de conceito" e "definição de conceito", desenvolvidos por David Tall e Shlomo Vinner, indicam que boa parte dos conceitos utilizados cotidianamente nem sempre estão formalmente definidos. Inicialmente, aprende-se a reconhecê-los pela experiência e a empregá-los em contextos apropriados.

Tratando-se de um conceito matemático, Tall e Vinner (1981) afirmam que ele não deve ser introduzido ou trabalhado tendo como referência única a sua definição formal. Os autores afirmam que, para a definição formal ser totalmente compreendida pelo estudante, é preciso que ocorra uma familiarização precedente com o conceito em questão, desenvolvida a partir de uma exploração tendo como base impressões e experiências variadas.

Para Tall e Vinner (1981), conceito é como um símbolo ou nome que auxilia na sua manipulação mental, de modo que a estrutura cognitiva que envolve um conceito é bem mais ampla que a manipulação de um nome. Eles utilizam o termo "imagem de conceito" para descrever a estrutura cognitiva ligada a um determinado conceito e a definem:

> usaremos o termo imagem de conceito para descrever a estrutura cognitiva total associada a este conceito, que inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece" (TALL e VINNER 1981, p. 152).

Desse modo, torna-se essencial colocar o aluno em contato com diferentes tipos de representações e elementos sobre determinado objeto matemático, para que ele possa formar uma imagem de conceito rica, além de que, assim, propicia-se um significado mais claro para a formalização de um conceito.

> A interação entre os diferentes tipos de representação propicia um entendimento matemático mais profundo sobre os conceitos. Quando a imagem de conceito de um estudante se torna mais ampla, ele adquire uma

> concepção mais rica e abrangente do conceito matemático (ATTORPS, 2006, p. 111).

Segundo os autores, a aprendizagem da definição formal de um conceito requer o estímulo e o desenvolvimento anterior de uma imagem de conceito que seja essencialmente rica. Sobre definição de conceito, os autores explicam que ela é determinada como

> [...] uma reconstrução pessoal feita pelo estudante. É então o tipo de palavras que o estudante usa para sua própria explanação de seu conceito imagem. Se os conceitos definição lhe são dados ou construídos por si mesmo, podem variar de tempo em tempo. Dessa maneira, um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, este último sendo um conceito definição que é aceito pela comunidade matemática (TALL e VINNER, 1981, p. 153).

Essa sentença pode tanto ser meramente decorada quanto aprendida de forma mais significativa pelo aluno. Pode também ser uma construção pessoal do próprio aluno, ou seja, uma forma de palavras usadas por ele para explicar o conceito do seu ponto de vista, utilizando para isso sua imagem de conceito. Assim, a definição de conceito pode ou não coincidir com a definição formal correspondente.

A teoria exposta sinaliza que a compreensão adequada de uma definição formal demanda uma imagem de conceito bem construída.

Metodologia de Pesquisa

A partir do embasamento teórico, foram elaboradas atividades que tinham como propósito construir imagens de conceito referentes à soma dos termos de uma progressão geométrica para definição desse conceito e deduzir uma expressão matemática para obtenção dessa soma.

A pesquisa foi aplicada em uma turma de 23 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual, do município de Candelária/RS. Os alunos foram agrupados em cinco grupos, nomeados pelas cinco vogais: A, E, I, O e U.

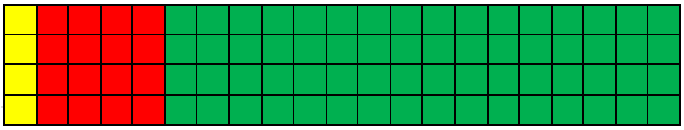
Após a realização de cada atividade, foi reservado um espaço para discutir e socializar as respostas dadas às questões propostas, fazendo com que cada grupo expusesse e sanasse eventuais dúvidas ainda existentes de acordo com os passos preconizados pela Metodologia de Ensino Através da Resolução de Problemas, das autoras Onuchic e Allevato (2009). O levantamento de dados deu-se a partir dos registros feitos pelo professor e pelos registros das atividades desenvolvidas pelos alunos.

Análise dos resultados

A primeira atividade buscou determinar uma expressão para a soma dos termos de uma progressão geométrica finita a partir de uma abordagem envolvendo uma situação relacionada à pintura de um muro com três cores, sendo descrita na Figura 1.

Figura 1 – Atividade I - determinação de uma expressão para a soma dos termos de uma PG finita.

O muro de 21m x 4m foi revestido por lajotas de $1m^2$ de área



a) Descreva a sequência do número de lajotas de acordo com as cores;

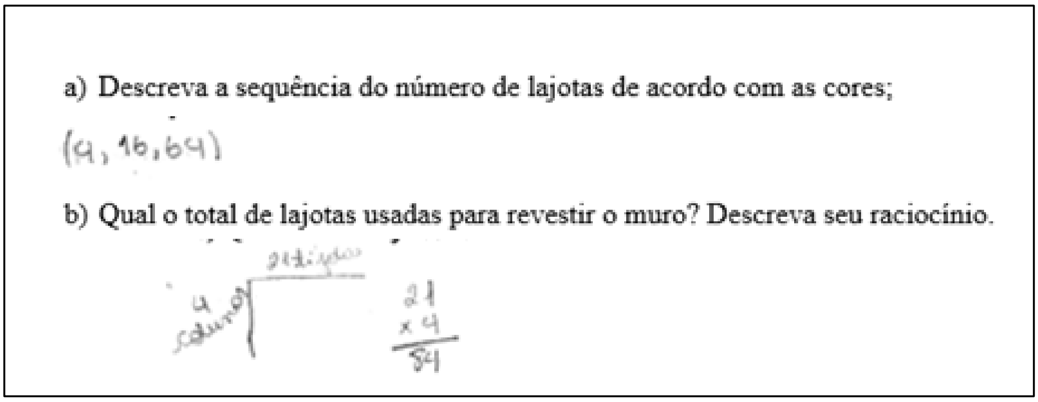
b) Qual o total de lajotas usadas para revestir o muro? Descreva seu raciocínio.

c) É possível obter uma expressão para calcular a somados n primeiros termos da sequência?

Fonte: Dados da pesquisa.

Inicialmente, foi questionado o número de lajotas utilizadas para revestir o muro de acordo com a cor. Essa questão foi solucionada facilmente pelos alunos. A plenária foi realizada de modo coletivo e oralmente, já que os grupos apresentaram estratégias semelhantes. A estratégia desenvolvida pelo grupo I é apresentada na Figura 2.

Figura 2 – Solução do grupo I para as letras *a* e *b*



a) Descreva a sequência do número de lajotas de acordo com as cores;

(4, 16, 64)

b) Qual o total de lajotas usadas para revestir o muro? Descreva seu raciocínio.

4 colunas

21
x 4
84

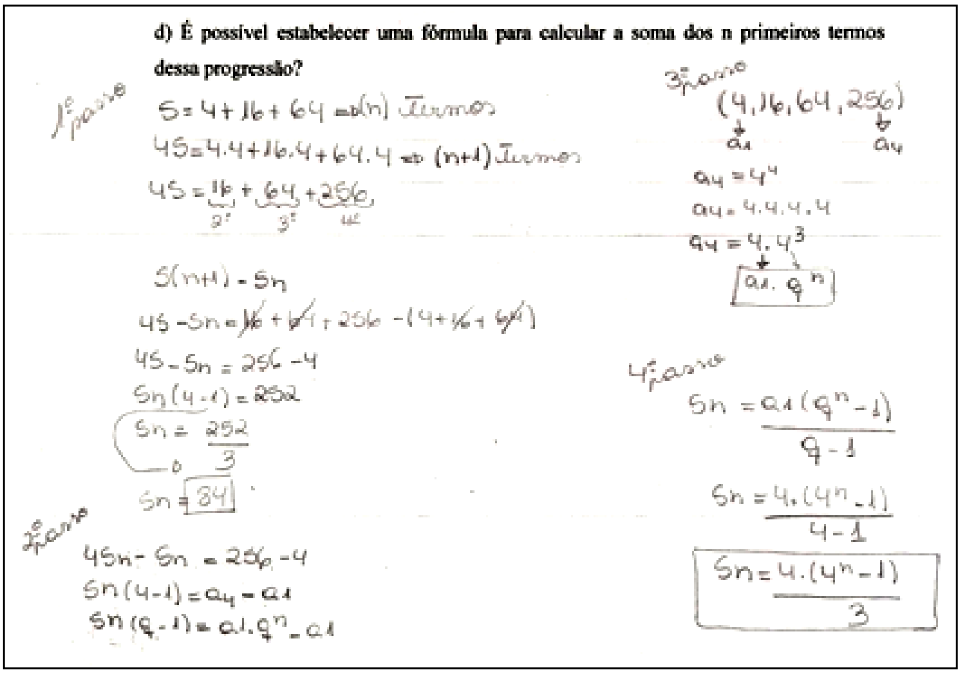
Fonte: Dados da pesquisa.

Posteriormente, foi pedido que se estabelecesse uma fórmula para calcular a soma dos *n* primeiros termos da progressão envolvida na situação. Nessa questão, os alunos apresentaram dificuldades, uma vez que se tratava de uma construção algébrica com a qual tiveram pouco contato ao longo da vida escolar, portanto não tinham construído imagens conceituais ricas que pudessem levá-los a uma expressão que envolvia diversas observações e abstrações.

Durante as discussões nos grupos, o professor pôde analisar que os alunos não conseguiam estabelecer qualquer tipo de generalização para a soma, mesmo quando eram realizados questionamentos que levassem a uma observação mais atenta do comportamento da sequência com relação à soma dos termos.

Passados alguns minutos, foi necessário que o professor fosse ao quadro e que, de forma coletiva com os alunos, fossem construídas estratégias para que eles pudessem chegar à solução da questão. O professor partiu da soma dos termos de modo numérico para, então, de forma gradativa, utilizar a abstração para generalizar a situação, conforme o registro do grupo O na Figura 3.

Figura 3 - Registro do grupo O para a atividade coletiva na letra *d*


d) É possível estabelecer uma fórmula para calcular a soma dos n primeiros termos dessa progressão?

1º passo
$S = 4 + 16 + 64 \Rightarrow (n)$ Termos
$4S = 4.4 + 16.4 + 64.4 \Rightarrow (n+1)$ Termos
$4S = \underbrace{16}_{2^\circ} + \underbrace{64}_{3^\circ} + \underbrace{256}_{4^\circ}$
$S(n+1) - S_n$
$4S - S_n = \cancel{16} + \cancel{64} + 256 - (4 + \cancel{16} + \cancel{64})$
$4S - S_n = 256 - 4$
$S_n(4-1) = 252$
$S_n = \frac{252}{3}$
$S_n = \boxed{84}$

2º passo
$4S_n - S_n = 256 - 4$
$S_n(4-1) = a_4 - a_1$
$S_n(q-1) = a_1.q^n - a_1$

3º passo
$(\underset{a_1}{4}, 16, 64, \underset{a_4}{256})$
$a_4 = 4^4$
$a_4 = 4.4.4.4$
$a_4 = 4.4^3$
$\boxed{a_1 . q^n}$

4º passo
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$
$S_n = \frac{4.(4^n - 1)}{4-1}$
$\boxed{S_n = \frac{4.(4^n - 1)}{3}}$

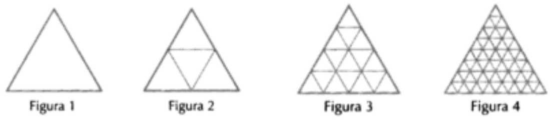
Fonte: Dados da pesquisa.

Mesmo com a realização dessa busca coletiva, os grupos ainda demonstravam certa insegurança no processo realizado. Justificaram que envolvia diversas observações e que algumas não estavam bem claras ainda. Era necessário que esse processo fosse mais explorado. As imagens do conceito ainda não eram suficientes para os alunos obterem uma generalização.

O contexto da segunda atividade envolvia a iteração de figuras formadas por triângulos, conforme Figura 4.

Figura 4 – Atividade II - determinação de uma expressão para a soma dos termos de uma PG finita.

Nas figuras abaixo em cada iteração são marcados os pontos médios de cada lado e construídos novos triângulos.



a) Escreva a sequência do número de triângulos de cada figura.

b) Quantos triângulos têm em cada uma das figuras?

c) Qual é o número total de triângulos formados pelas figuras 1,2, 3, e 4?

d) Estabeleça uma lei que relaciona a soma da quantidade dos triângulos nas quatro figuras.

e) É possível saber quantos triângulos têm as n-primeiras figuras?

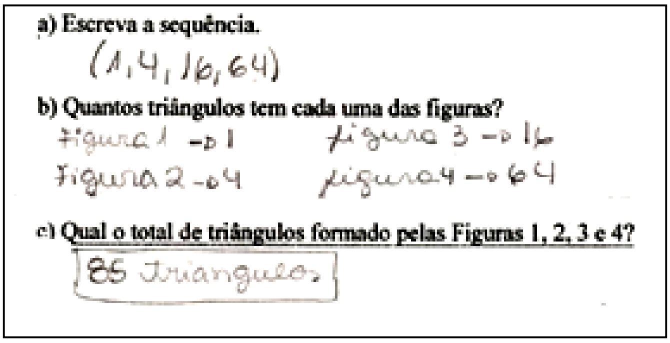
Fonte: Dados da pesquisa.

A primeira pergunta solicitou que os alunos escrevessem uma sequência com o número de triângulos formados a cada iteração. Nesse processo, prontamente os estudantes visualizaram que se tratava de uma progressão geométrica e logo concluíram a questão.

Após, foi indagado qual era o total de triângulos formados pelas figuras representadas. Novamente, os alunos utilizaram a soma dos termos da progressão geométrica construída. A plenária foi realizada de forma oral nessas primeiras atividades, com o intuito de dinamizar a aula, já que se tratava de questões mais simples de se resolver.

Nota-se que, nessas três questões, os grupos fizeram conjecturas diretas com o conceito de progressões geométricas para auxiliar na resolução das atividades, portanto conclui-se que nessa etapa os alunos mobilizaram imagens conceituais a partir das experiências vividas anteriormente, bem como souberam utilizá-las em um momento particular.

Figura 5 – Registro do grupo U para as questões *a, b* e *c*


a) Escreva a sequência.

(1, 4, 16, 64)

b) Quantos triângulos tem cada uma das figuras?

figura 1 → 1 figura 3 → 16

figura 2 → 4 figura 4 → 64

c) Qual o total de triângulos formado pelas Figuras 1, 2, 3 e 4?

85 triangulos

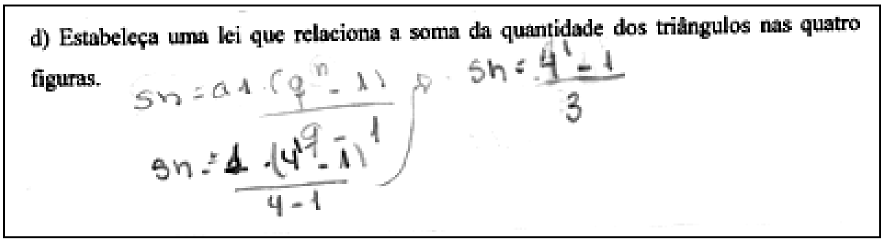
Fonte: Dados da pesquisa.

Na letra *d,* foi pedido que fosse estabelecida uma lei que pudesse relacionar a soma da quantidade dos triângulos nas quatro figuras. Nessa questão, devido às dificuldades dos alunos, o professor aproveitou para construir coletivamente essa expressão, pois os alunos não tiveram clareza no processo realizado na atividade anterior.

Passados alguns questionamentos e discussões entre os grupos e o professor, três grupos conseguiram chegar à lei para a soma: A, O e U, o que demonstra certa evolução nesse conceito por parte dos alunos, já que anteriormente necessitaram maior auxílio do professor. Esse fato comprova, também, que a partir de novos estímulos e novas experiências é possível desenvolver a capacidade cognitiva fugindo do modelo tradicional.

A plenária nessa questão foi desenvolvida por meio do registro no quadro para possibilitar novas observações e conjecturas a partir desse processo coletivo. Abaixo, na Figura 6, é apresentado o registro do grupo A para a questão.

Figura 6 - Registro do grupo A para a letra *d*


d) Estabeleça uma lei que relaciona a soma da quantidade dos triângulos nas quatro figuras.

$Sn = a1 \cdot (q^n - 1)$

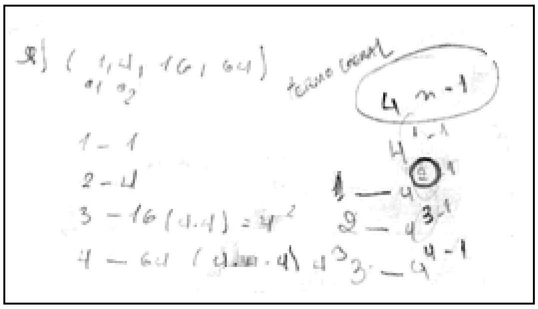
$Sn = \frac{1 \cdot (4^4 - 1)}{4-1}$

$Sn = \frac{4^4 - 1}{3}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Finalizando essa atividade, os alunos deveriam estabelecer o número de triângulos na n-ésima figura. Todos os grupos associaram a n-ésima figura com o termo geral. Sendo assim, não houve grandes dificuldades e questionamentos antes nem durante a plenária. Isso também demonstra que os grupos compreenderam o conceito relativo ao termo geral e sua aplicação, da mesma forma que mobilizaram suas imagens de conceito, construídas anteriormente. Na Figura 7, é mostrado o registro do grupo I utilizando o termo geral para a solução, como os demais.

Figura 7 - Registro do grupo I para a atividade *e*



Fonte: Dados da pesquisa

Na terceira atividade, foi abordado o termo geral da soma infinita de uma progressão geométrica. O enunciado é apresentada na Figura 8.

Figura 8 – Atividade III - Determinação da expressão para a soma dos termos de uma PG infinita.

Uma bola é atirada ao chão de uma altura de 200m. Ao atingir o solo pela primeira vez ela sobe até a metade da altura inicial, e assim sucessivamente até perder energia e cessar o movimento. Quantos metros a bola percorre ao todo?

a) Faça um desenho representativo da situação.

b) É possível resolver esse problema utilizando a expressão da soma de uma PG finita?

c) Qual a diferença entre a soma de uma PG finita e uma PG infinita?

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a leitura individual e em grupos, os alunos fizeram uma ilustração representando a situação proposta, com o objetivo de que fosse observado o comportamento da altura da bola em cada estágio. Na Figura 9, está o desenho feito pelo grupo I para a situação apresentada.

Figura 9 - Ilustração do grupo I para a letra *a*

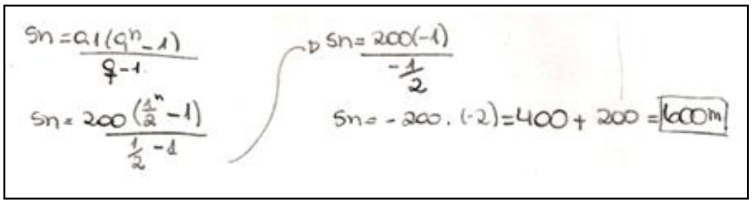
Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos tentaram utilizar a mesma estratégia usada nas situações anteriores envolvendo a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, porém, dessa vez, eles notaram que não chegariam a um valor exato, apenas a uma distância aproximada, pois não tinham uma quantidade finita de termos para calcular a distância percorrida pela bola.

Esse foi um momento de muitas dúvidas, então o professor trabalhou noções de convergência com funções exponenciais de base fracionária menores do que 1 e maiores do que 1, com o auxílio do livro didático, para que os alunos pudessem construir uma imagem de conceito referente ao comportamento de progressões geométricas com razão positiva menores e maiores do que 1.

Posteriormente, os alunos concluíram que, no caso de a base ser menor do que 1, sempre iria ocorrer uma convergência para zero. Portanto, a partir da expressão para a soma finita dos termos de uma progressão geométrica, bastava substituir a razão elevada na potência *n* por zero. Os participantes do grupo U efetuaram o cálculo concluindo que eram percorridos 600m pela bola, conforme mostra a Figura 10, por meio do registro do grupo U.

Figura 10 - Solução apresentada pelo grupo U



Fonte: Dados de pesquisa.

Essa questão foi analisada de forma coletiva, com a participação de todos os grupos oralmente. Durante a plenária, quanto à resolução dos cálculos, o professor

DOI 10.36661/2596-318X.2020v2n2.11836

analisou a interpretação dada pelo grupo e o porquê de o grupo ter adicionado mais 200m, pois a soma dos termos era descrita por 200+100+50+25+... ou 200(1+1/2 +1/4+1/8+...). Ao perceberem que o primeiro termo não era somado, os alunos compreenderam o equívoco.

Finalizando a atividade, os alunos deveriam relatar qual a diferença entre a soma de uma PG finita e uma PG infinita. Nessa questão, os alunos ainda não conseguiram estabelecer a diferença entre somar uma quantidade finita de termos e somar uma quantidade infinita de termos. Esse fato demonstra que os alunos não conseguiram construir imagens de conceito claras acerca da soma de uma PG infinita.

A quarta atividade também envolvia o conceito e o termo geral da soma de uma progressão geométrica infinita, conforme Figura 11.

Figura 11 - Atividade IV para determinar a expressão para a soma dos termos de uma PG infinita.

Você tem uma jarra de 500 ml e deve enchê-la da seguinte forma: no 1° dia deve encher até a metade, no 2° dia a metade da quantidade do dia anterior e assim sucessivamente.

a) A água transbordará do recipiente?

b) Faça o desenho representando a situação.

c) Utilize a expressão da soma de uma PG finita para tentar resolver o problema.

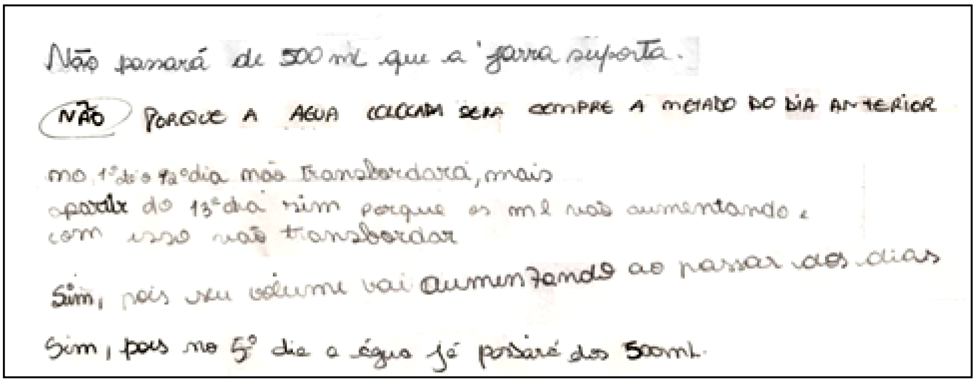
d) Escreva uma expressão algébrica que represente essa situação.

Fonte: Dados da pesquisa.

A primeira questão questionou se a água transbordaria do recipiente. Inicialmente, cada grupo discutiu para se chegar a uma resposta. Após, foi realizada a plenária. Dois grupos, E e I, responderam que a água não transbordaria, pois a cada dia era sempre colocada metade da quantidade do dia anterior. Sendo assim, iria se aproximar da capacidade máxima de 500ml, mas não ultrapassaria esse valor.

A Figura 12 mostra as diferentes respostas dos grupos para essa atividade.

Figura 12 - Solução dos grupos para a atividade *a*



Não passará de 500 ml que a jarra suporta.

NÃO PORQUE A AGUA COLOCADA SERA SEMPRE A METADE DO DIA ANTERIOR

no 1º dia ao 12º dia não transbordará, mais
apartir do 13º dia sim porque os ml vão aumentando e
com isso vão transbordar

Sim, pois seu volume vai aumentando ao passar dos dias

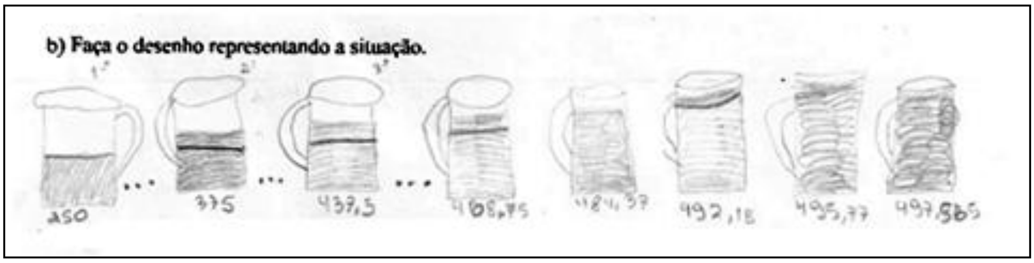
Sim, pois no 5º dia a água já passará dos 500mL.

Fonte: Dados da pesquisa.

Essa pergunta possibilitou verificar que nem todos os alunos tinham compreendido claramente o conceito de convergência, já que a maioria concluiu que a água transbordaria utilizando como estratégia a soma das capacidades em cada dia. Os alunos não identificaram que os valores formavam uma PG infinita com razão positiva menor do que 1.

Em seguida, foi pedido que os alunos ilustrassem a situação. Na Figura 13, é apresentado o desenho feito pelo grupo I, o qual possibilitou a visualização e a reflexão sobre a resposta da questão.

Figura 13 – Representação feita pelo grupo I.

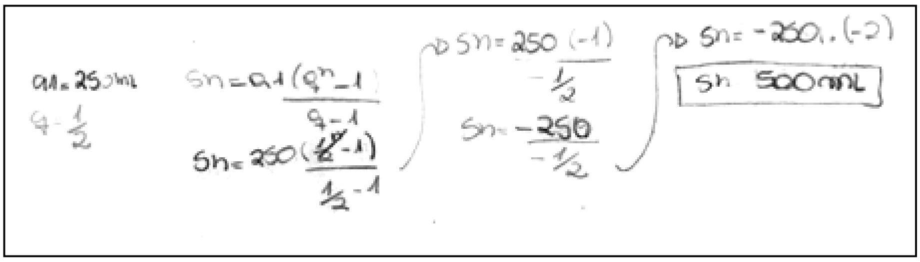


Fonte: Dados da pesquisa.

Com o auxílio do desenho, muitos dos alunos compreenderam que o volume de água se aproximava da capacidade total do recipiente. Nesse caso, o desenho foi fundamental para que reformulassem suas imagens conceituais sobre a convergência da sequência de valores.

Posteriormente, deveriam tentar utilizar a soma de uma PG finita para resolver o problema. Como já haviam realizado na atividade anteriormente, os grupos não tiveram dificuldades na solução, pois notaram que se tratava de uma soma infinita dos termos de uma progressão geométrica cuja razão era $\frac{1}{2}$. Também já haviam visto que quando n cresce $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge para zero, portanto poderiam substituir por zero na expressão da soma de uma PG finita. Todos os grupos chegaram ao mesmo resultado de 500ml, ou seja, a capacidade máxima da jarra. Na Figura 14, é mostrada a solução do grupo U, realizada a partir da expressão construída anteriormente.

Figura 14 - Solução apresentada pelo grupo U.



Fonte: Dados da pesquisa.

Encerrando essa atividade, os alunos deveriam escrever uma expressão algébrica que representasse a situação. Nesse processo, os alunos utilizaram a expressão da soma de uma PG finita como ponto de partida. Eles justificaram que, se a razão q da PG é menor do que 1, então q^n converge para zero. Todos os grupos conseguiram realizar a tarefa de forma correta utilizando a mesma estratégia. Eles descreveram que a expressão era a mesma e que a diferença estava no comportamento da sequência quando a razão da PG era menor do que 1. Essas explicações foram dadas oralmente no momento da plenária.

Considerações Finais

A utilização da Metodologia de Ensino Através da Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2009) foi eficiente no decorrer do trabalho em sala de aula. Ela favoreceu o diálogo entre os grupos de modo cooperativo, propiciou ao professor instigar e desafiar os alunos no desenvolvimento das atividades de modo a ocupar o papel de mediador no processo, bem como promoveu uma participação efetiva dos alunos.

Inicialmente, alguns alunos questionaram a metodologia utilizada, pois ela exigia que tivessem que pensar e raciocinar constantemente para encontrar a solução. Do mesmo modo, sentiram maiores dificuldades em entender o funcionamento da dinâmica. Esse fato ocorre pois, normalmente, os conceitos são trabalhados a partir de definições seguidas de exemplos e exercícios, quando o professor apenas transmite o conteúdo. Nessa experiência, observou-se que essa ordem foi invertida, ou seja, as definições só foram construídas ao final das atividades, a partir da mobilização de imagens do conceito desenvolvidas a partir da utilização de diferentes representações.

Pode-se afirmar, também, que as contribuições dessa metodologia para o ensino e aprendizagem foram: aumento da capacidade de argumentação durante as discussões; estabelecimento de relações entre as representações matemáticas facilitando a compreensão do significado da soma dos termos de uma progressão geométrica; possibilidade de os alunos aprenderem a partir do próprio erro; e aprendizagem de trabalho de forma colaborativa.

Os alunos sentiram algumas dificuldades em relação à interpretação dos enunciados, à descrição das estratégias de solução e ao uso da linguagem matemática formal. Apesar dessas dificuldades, a maioria conseguiu se apropriar dos conceitos trabalhados. Portanto, pode-se considerar que a construção das imagens do conceito, propiciada pelas atividades propostas, e a Metodologia de Ensino Através da Resolução de Problemas favoreceram um processo significativo de ensino-aprendizagem-avaliação desse conteúdo.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

AMADO, N.; CARREIRA, S.; JONES, K. Broadening Research on Mathematical Problem-Solving: an Introduction. In: AMADO, N.; CARREIRA, S.; JONES, K. (eds.). **Broadening the scope of research on mathematical problem solving**: a focus on technology, creativity and affect (Research in Mathematics Education), Springer International Publishing, 2018, pp. 1-14.

ATTORPS, I. **Mathematics teachers' conceptions about equations**. 2006. (Thesis in Applied Education). University of Helsinki. Disponível em:

http://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/20050/mathemat.pdf?sequence=1. Acesso em: 10 nov. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf. Acesso em: 8 nov. 2020.

ONUCHIC, L. R. Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. In: Seminário de Resolução de Problemas, 1., 2008, Rio Claro. **Anais eletrônicos.** Rio Claro: GTERP, 2008. Disponível em:
< http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2020.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, v. 55, p. 1-19, 2009.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Reston: NCTM, 1989. p. 1-22.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.