Educação Matemática Sem Fronteiras, Chapecó, v. 1, n. 1, p. 77 - 95, jan-junho, 2019.

EMSF

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

APONTAMENTOS DA IMPORTÂNCIA DE UM AMBIENTE DINÂMICO PARA PRÁTICAS GEOMÉTRICAS

NOTES ON THE IMPORTANCE OF A DYNAMIC ENVIRONMENT FOR GEOMETRIC PRACTICES

Adlai Ralph Detoni [1]

Resumo

Neste texto faço argumentações que apontam positivamente para a prática da Geometria das Transformações e da Geometria Projetiva realizada com auxílio de *softwares* gráficos, aproximando as características epistemológicas e metodológicas delas com o potencial de dinamismo que o ambiente computacional oferece. Argumento que são duas Geometrias que trazem o movimento em suas essências, a partir da exploração de ideias de matemáticos e educadores matemáticos. Enfrento a questão principal que foco com resultados de quatro pesquisas realizadas envolvendo atividades geométricas que favorecem a investigação matemática, a colaboração e a interação com recursos computacionais, nas quais os sujeitos corroboram com a afinidade das Geometrias focadas e o ambiente dinâmico do computador.

Palavras-chave: Geometria Projetiva; Geometria das Transformações; Geometria Dinâmica; Geogebra.

Abstract

On this text, I argue on the positivity of the practice of Geometry of Transformations and of Projective Geometry carried out with the aid of graphic software, bringing together their epistemological and methodological characteristics under the potential for dynamism shown by the computational environment. I defend that those are two Geometries that bring movement in their essence, from the exploration of ideas from mathematics and mathematic educators. I face the main issue focused on with results from four researches involving geometric activities that favor mathematic investigation, collaboration and the interaction with computational resources, in which subjects corroborate with the affinity of focused Geometries and the computer's dynamic environment.

Keywords: Projective Geometry; Geometry of Transformations; Dynamic Geometry; Geogebra.

Introdução

Frequentemente a Geometria, em sua prática escolar, torna-se objeto de reflexões que fazem suscitar olhares críticos sobre como seus currículos estão sendo realizados. Dois aspectos são mais enfocados: a escolha dos conteúdos – que imediatamente nos remete para a questão de qual Geometria se trabalha – e a proposta pedagógica que a conduz. Esse segundo aspecto, que responde imediatamente pelos objetivos educacionais para com a Geometria, está iminentemente ligado a escolhas de metodologias didáticas.

[1] Doutor em Educação Matemática, UFJF.

Argumento que a tarefa educacional da Geometria é distinta de outros campos da Matemática, como, por exemplo, da Álgebra, conforme interpreto a partir de estudos de pesquisadores que assinaram uma publicação do ICMI (1995). Eles afirmam que a problemática da Geometria se inicia nela mesma, em sua potencial riqueza de escolhas e tratamentos.

Um documento mais atual é a BNCC, Base Nacional Comum Curricular (MEC, 2018). Nela vemos, à minha interpretação, uma ênfase em papeis menos conteudísticos e mais metodológicos, isto é, não propõem a Geometria nela mesma, mas ela a serviço de uma exploração do mundo físico, de uma janela para se praticar uma *variedade* de espacializações e oportunizadora de procedimentos heurísticos, dentro de um espírito didático da investigação, da interpretação e da atribuição de conjecturas.

As pesquisas das quais venho participando nos últimos anos abraçam, por extensão, os propósitos expressos na BNCC, no sentido em que buscam possibilidades para serem trabalhadas junto ou alternativamente com a prática usual da Geometria Escolar no Brasil. Neste artigo, trago alguns apontamentos possíveis a partir da Geometria Projetiva e da Geometria das Transformações, ambas estudadas no caráter puro, sintético, sem necessárias complementações algébricas, uma vez que se privilegia o espaço gráfico como horizonte de significação matemática.

Nos estudos que faço junto a um grupo de estudos está implicada nossa habitação de espaços gráficos permitidos por *softwares*, especialmente o Geogebra, pela acessibilidade que nos é permitida. Mais que pensar o computador com auxiliar, trago preocupações para a compreensão da potencialidade espacial computacional como uma permanente novidade de ocupação didática. Toda a exposição a seguir vai na direção de corroborar com os que também apontam o ambiente dinâmico de *softwares* como atinente a um pensamento geométrico que, também, em sua essência epistemológica, requer uma espacialização dinâmica.

Olhando a Geometria das Transformações e a Geometria Projetiva como do movimento

A recompreensão da estrutura científica da Geometria realizada por matemáticos aos fins do século XIX, fenômeno que reconhecemos, aqui, especialmente devido aos trabalhos de Feliz Klein, nos orienta para podermos dizer de um novo estatuto epistemológico para essa ciência.

Depois de séculos assentada placidamente em suas poderosas bases euclidianas, na época mencionada acima vemos se constituindo novos olhares sobre diversas realizações alternativas que vão convergindo para uma nova e necessária compreensão. Por um lado, temos as chamadas geometrias não-euclidianas, oriundas, principalmente, da quebra da visão absoluta acerca do famoso quinto postulado euclidiano e se organizando durante todo o século XIX. Por um outro lado, temos as transformações geométricas incorporadas às técnicas operatórias e repertório de espacialização, gerando novas relações e novos objetos científicos.

Piaget e Garcia (1987) fazem um histórico de como as transformações vão migrando da Álgebra para a Geometria, a partir mesmo do espaço analítico, onde estes dois modos de realização matemática estão concomitantes. Orientado por esses autores, trago um citação de Klein que sintetiza o sinal de que o fazer geometria estava tomando novas atitudes epistemológicas: "Dada uma multiplicidade e um grupo de transformações dessa multiplicidade, desenvolver a teoria das invariantes desse grupo" (KLEIN, F., 1974, p. 7 apud PIAGET, J. & GARCIA, R., 1987, p. 106).

Obviamente que a Geometria nas bases euclidianas e no seu tratamento axiomático abrigam transformações, uma vez que mesmo a congruência é uma relação entre, inicialmente, uma coisa e ela mesma. Nessa Geometria a observância de invariantes intrínsecos a figuras permite a constituição de um extenso rol de propriedades geométricas. Mas, esse modo de constituir objetos faz, doravante, deixar implícitos os movimentos, as transformações, a desenvoltura do pensamento que assim espacializa, para deixar apenas aparente seus resultados. Consonante à questão da presença (uma quase ausência) de um pensamento dinâmico, esse modo é hegemônico em nossas salas de aula e em nossos livros didáticos.

No conhecido ´Programa de Erlangen´, de Félix Klein (1984), um conceito mais geral de Transformação é trabalhado com determinação, a ponto de ser ela o critério para a uma nova visão epistemológica sobre o universo da Geometria, ou das geometrias, uma vez que a pluralidade de modos geométricos é um resultado quase imediato, ao se discriminar grupos de transformações, pelas invariâncias observadas.

No século passado essas novas visões vão gerar discussões acerca do que seria a Geometria, ou, do que seria a compreensão de geometrias, com o natural direcionamento para a questão da educação geométrica escolar. Entre outros, Piaget foi mais incisivo em propor mudanças curriculares, ao dizer de uma necessária inversão didática, em que a aprendizagem geométrica começasse dos grupos mais gerais indo até o mais particular, o euclidiano (PIAGET, J., INHELDER, B., 1993).

Piaget trabalha, como entendo, as sugestões de Klein vindas do citado Programa, ficando afim com o pensamento estruturalista que campeou a produção matemática no século XX e, de certo modo, influenciando propostas de educação geométrica que propunham o pensamento de Transformações já para crianças escolares. No Brasil, o grupo sediado na Universidade Federal da Bahia (1990), tendo Omar Catunda e Martha Dantas como organizadores, é exemplo dessa influência ao propor uma renovação do ensino de Geometria. Outro exemplo é a tradução, encomendada oficialmente, de obra com proposta de Dienes e Golding (1959) endereçada para professores dos anos iniciais, a qual trazia atividades corporais e com materiais concretos, também voltadas para transformações geométricas.

Já Hans Freudenthal (1983), educador matemático considerado, afirma uma variedade de possíveis tratamentos didáticos para a Geometria, mas critica a rigidez da proposta piagetiana ao procurar colocar a questão das escolhas curriculares não sob a perspectiva estruturalista, mas buscando no contexto vivido (por crianças) as experiências características de cada situação, podendo se estar no âmbito euclidiano, no afim, no projetivo, no topológico, etc., conforme os significados pertinentes assim demandarem.

Reconduzindo minha compreensão acima esboçada de que a tradição euclidiana deixou implícitas as transformações, entendo que as características que estruturam a espacialidade projetiva são, imediatamente, indicadoras de um pensamento dinâmico, pelo que implica numa relação *entre* figuras, pela necessária análise de mudanças ocorridas e pela consideração do movimento – inclusive intelectual – inerente ao se acompanhar mudanças.

Também com relação à Geometria das Transformações, entendo um imediato sentido de dinamicidade, uma vez que é propriamente um movimento – de reflexão, de translação, de rotação, por exemplo – que abre a espacialização geométrica nesse caso. Esses três modos de movimento são usualmente os que estão presentes em práticas curriculares geométricas que acolhem a Geometria das Transformações e são os que definem um determinado grupo de invariâncias, o que caracteriza o mundo euclidiano. Os três costumam conjugar espaço curricular com as transformações por homotetia, quando estaríamos num grupo de invariantes mais abrangente, o das Semelhanças, nos termos kleineanos.

Nas pesquisas de meu grupo de estudo privilegiamos notadamente o trato sintético. Entendemos isso como ter a espacialidade gráfica geométrica como fundo de trabalho de investigação de situações propostas e desenvolvimento pleno das ações implicadas. Obviamente que textos dos sujeitos registrando compreensões e resultados alcançados são aliados no processo. Essa escolha pelo gráfico, entre outras implicações didáticas e pedagógicas, faz retomar o espírito grego clássico do trabalho com a régua e/ou compasso.

Pesquisas que mostram a imbricação de um ambiente dinâmico e o desenvolvimento de um novo saber geométrico

Vou trazer aqui resultados de quatro pesquisas das quais participei junto a colegas pesquisadores no intuito de argumentar com resultados convalidados cientificamente a questão principal que trago neste artigo, a da potencialização que ambientes computacionais dinâmicos trazem a estudantes das Geometrias Projetiva e das Transformações.

Devo esclarecer que em cada uma dessas pesquisas um protocolo de ações foi percorrido, abrangendo a compreensão científica, histórica, epistemológica e filosófica da Geometria focada, um pensamento sobre currículo escolar, a compreensão de um *software* gráfico como reorganizador didático e uma pesquisa de campo no qual todos os dados e suas análises se referem a manifestações dos sujeitos sobre atividades propostas, e não sobre elas em si, em acordo com o viés fenomenológico que fundamentou toda a metodologia de pesquisa.

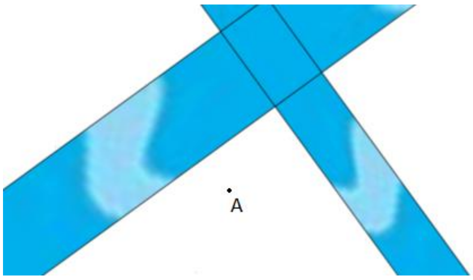
Em todas as quatro houve uma pesquisa de campo ambientada em laboratório de ensino ou sala de aula assistidos por computadores que disponibilizaram o *software* Geogebra. Em comum nelas, foram formados grupos de sujeitos que cursavam graduação em Matemática ou já eram professores formados. Uma sequência de atividades era apresentada em cada caso, constando, basicamente, de problemas propostos. Em uma delas também foi apresentado o esboço de um curso conciso de Geometria Projetiva.

De um modo geral, um ambiente didático foi instalado na perspectiva de um trabalho colaborativo e as situações propostas pensadas dentro da perspectiva de serem fomentadoras de uma investigação geométrica. Confirmando o que estava projetado em todas essas pesquisas de campo, a obtenção de soluções precisas por parte dos sujeitos foi menor que a riqueza dos significados de várias ordens – epistemológica, didática, pedagógica, filosófica e formação profissional – vivenciados por todos os participantes.

´Geometria do Movimento´ em movimento

Duas dessas pesquisas focaram a Geometria das Transformações, uma ocorrida em um curso de Matemática numa universidade federal mineira (OLIVEIRA, 2017) e um numa universidade estadual paulista (PINHEIRO, 2018). Elas conjugaram de algumas atividades sobre situações propostas comuns. Um exemplo, aqui adaptado, é o que se segue:

Figura 1: Exemplo de situação proposta



Uma prefeitura quer construir uma passarela reta sobre dois córregos da cidade. Um dos pilares de sustentação deve estar na posição A, e os trechos sobre cada córrego devem ser iguais, por razões estéticas e financeiras.
Desenhe essa passarela no croqui ao lado.

Fonte: o autor

A situação proposta é lacônica acerca de relações geométricas a serem trabalhadas, mas tem elementos figurais bastante familiares a estudantes de geometria, e, portanto, tem uma interpretação inicial viável, especialmente com recursos gráficos computacionais. As larguras e o ângulo que os córregos fazem poderiam ser fornecidos em valores numéricos, mas, pela experiência que nosso grupo cultivou em estudos, fomentaria uma iniciativa gerando relações métricas e cálculos, fugindo da expectativa de uma investigação puramente gráfica. Na pesquisa de campo de Oliveira (2017), os sujeitos simularam uma solução auxiliar em rascunho e arrastaram o que seria a reta resposta, percebendo que podiam transladar os segmentos que cobrem os córregos para ser uma mesma diagonal do retângulo formado por eles, o que lhes encaminhou a solução definitiva.

Essa pesquisadora trabalhou com alunos de uma disciplina na qual as transformações geométricas faziam parte da ementa. Ela apresentou aos sujeitos atividades com situações propostas envolvendo rotação, translação, reflexão e homotetia, em sessões presenciais, sempre em grupo de dois ou três participantes. Havia a intenção de não avisar qual a transformação que os participantes deveriam tomar nos caminhos de solução, e o texto escrito e gráfico de todas as situações propostas requeriam ainda uma interpretação matemática e a discussão de estratégias para sua resolução.

Com a proposta de se pensar as soluções com desenhos livres, régua e compasso e *software* gráfico envolvidos, registrou-se as experiências tanto com gravações audiovisuais como o uso de um *software* livre para registro de operações feitas no computador. Com base na Fenomenologia, os dados gravados a partir das manifestações dos sujeitos foram, inicialmente, interpretados numa análise ideográfica, na qual as *ideias* genuínas foram constituídas. Num segundo momento, numa análise nomotética, essas ideias foram convergidas em núcleos, tornando-se ideias nucleares mais gerais. Isto foi feito em dois movimentos: um primeiro na convergência para ideias nucleares e um segundo para ideias nucleares mais abrangentes. Todos esses momentos de convergência se fizeram em atinência à questão que deu foco à pesquisa: ***Como aprendizes em colaboração constituem sentidos à Geometria das Transformações com mediação de ferramentas dinâmicas?*** , especialmente com ênfase no como.

Podemos ver no quadro abaixo a convergência que as análises da pesquisadora estruturaram para chegar ao núcleo abrangente de todas as ideias manifestas pelos sujeitos que estiveram junto ao *software*, e o termo de vivência que a pesquisadora colocou em seu nome diz de uma relação maior que simplesmente um uso. Para chegar a essa abrangência, a começar da **utilização do *software***, as ideias analisadas dizem de sua potencialidade em permitir uma desenvoltura didática numa série de **estratégias** que os estudantes constituem com ele, a partir de uma plena **interação** com o computador, na qual valores da prática científica e pedagógicos são reestruturados, colocando a constituição do conhecimento em novo estatuto epistemológico.

Podemos reportar uma série de manifestações dos sujeitos que estruturam as ideias constantes na primeira coluna da tabela acima e ofertaram todo o movimento de análises feito. Numa atividade em que dois sujeitos realizaram no Geogebra, a tarefa era encontrar inscrito num círculo dado o homotético de um triângulo dado. Depois de encaminhar a resposta já com dois lados do triângulo homotético traçados e, portanto, bastando simplesmente traçar o terceiro lado, um sujeito se utiliza das ferramentas para confirmar a certeza da resposta, já que sabe que homotetia implica paralelismo:

> Sujeito 1: Sabe o que eu quero fazer, ao invés de ligar eu quero fazer a paralela. Porquê? Só pra garantir,... não é que eu tô com medo... (utiliza o comando de reta paralela passando por um ponto): aí, perfeito, ó! (um sorriso e rosto de satisfação) (OLIVEIRA, 2017, p. 71)

Quadro 1: Tabela da convergência para ´Modos de viver o *software*´

<table>
<tr><th>Ideias</th><th>Ideias Nucleares</th><th>Ideias Nucleares Abrangentes</th></tr>
<tr><td>Constituição do pensamento junto ao software.</td><td rowspan="4">Interação com o software.</td><td rowspan="10">Modos de viver o Software</td></tr>
<tr><td>O software possibilita uma abertura para a solução. Dinamicidade didática.</td></tr>
<tr><td>O software possibilita uma reformulação de um conhecimento já posto.</td></tr>
<tr><td>O software abre possibilidades de investigação.</td></tr>
<tr><td>Uso do software para comprovar conhecimentos prévios.</td><td rowspan="4">Utilização de estratégias junto ao software.</td></tr>
<tr><td>O software como facilitador de construções.</td></tr>
<tr><td>Utilização de estratégias para a resolução junto ao software.</td></tr>
<tr><td>Utilização do software para formular e testar conjecturas</td></tr>
<tr><td>Utilização das ferramentas do software.</td><td rowspan="2">Utilização do Software.</td></tr>
<tr><td>Dúvida no uso das ferramentas do software.</td></tr>
</table>

Fonte: Oliveira, 2017, p. 134

Em outra situação os sujeitos iniciavam a compreensão de uma situação envolvendo (como se veria nos desdobramentos) rotação: uma rede de proteção triangular equilátera deveria ser estudada, de modo que seus vértices estivessem cada um sobre três círculos concêntricos (a situação foi contextualizada num circo: num vértice ela estaria presa na ponta de um canhão lançador de um homem-bala e os outros dois como pontas da rede esticada por dois ajudantes). Naturalmente, a situação exigiu esforços imaginativos para os estudantes engendrarem caminhos de solução. Como ela foi aberta já como aplicativo disponível no Geogebra, a pesquisadora motivou-os a poderem montar um triângulo solução auxiliar e movê-lo dentro das condições solicitadas. Dois sujeitos ficaram um longo tempo buscando apoiar um triângulo equilátero a partir da escolha de um primeiro vértice e, explorando os recursos inclusive métricos do *software*, decidir onde se fixaram os dois outros vértices. Esse procedimento, que também observamos em resolução de problemas fora de um *software*, mostra uma tentativa empírica. Nesse caso esta frustrou a dupla, mas as ações que fizeram, girando um primeiro lado apoiado para gerar o próximo congruente, levou um dos sujeitos a vislumbrar relações que indicavam a possibilidade de um pensamento rotacional:

> S1(sujeito 1): é... então olha só... C é B rotacionado 60º em torno de A. Beleza? // S4 (sujeito 4): unhum // S1: Se eu rotacionar esse círculo aqui onde ele tocar aqui, é o C. // S4 (olhando para a tela): Sim! // S1 (olhando para a S4): e eu posso arbitrar o A, concorda? // S4(olhando para tela com certa dúvida): uhm. // S1: Porque o A pode ser qualquer um, por que o A tá rodando aqui onde ele parar é, beleza?. // S4: Uhm. E como a gente vai fazer isso? No GeoGebra? // S1 : ahm . Mas tá certo isso? Porque o A tá parado... beleza; aí, existe um lugar para B e C para que é fixo, mas o A não! Dependendo do A, B e C vão variar. (Para e olha para a tela) Agora como faz isso no GGB? Como que rotaciona no Geogebra? (OLIVEIRA, 2017, p. 91-92).

Essas manifestações são ricas em apontar ideias, uma vez que não só mostram o *software* ajudando a desencadear uma estratégia de solução como nos dizem que não basta o programa disponibilizar comandos geométricos macros. A ferramenta ´rotação´ está lá disponível, mas as transformações requerem um pensamento sobre as ferramentas.

Também, com elas confirmamos que a tela do computador é um segundo mundo em sala de aula, permitindo uma dinâmica colaborativa de pessoas que assumem iniciativas de articular didaticamente o tempo de constituição do conhecimento, o conjunto de imagens e as trocas de conhecimento em todos os meios de linguagem disponíveis viabilizando as estratégias dialogadas.

Na pesquisa feita, a interação dos sujeitos com o computador flui naturalmente, dispondo a tela como um horizonte geométrico que acolhe articulações de pensamentos que abarcam conhecimentos geométricos de cada um com as possibilidades que o programa permite, deixando-os livres para imaginar movimentos em uso de posições auxiliares para posterior arrasto, abrindo caminhos de investigação. O diálogo abaixo está relacionado a uma situação que, também posteriormente entendido, envolvia rotação conjugada com homotetia, quando um triângulo equilátero deveria se apoiar em três retas dadas, dentro de condições expostas num texto contextualizado. Entre outros apontamentos, podemos ver a formulação de uma conjectura desfeita com o *software*, bem como a interação de movimentos e gestos com a tela, como que antecipando o que o programa pode realizar:

> S1: A gente arbitra um ponto aqui assim (aponta na tela do computador), ou aqui (na reta construída no computador) ... vou por aqui assim e monta o triângulo equilátero aqui; porquê? Depois a gente ou volta ou vai com ele, pode ser? . // S2: agora vê aí, um polígono regular (sugerindo usar macro do *software*). // S1: Aí, como é que é? Seleciona primeiro dois pontos e a quantidade de vértices... (lendo no *software*) Não, não pode ser assim, tem que construir aqui. // S2: É, é isso que eu tô pensando; vai ter que construir ele. [...] É, porque senão ele vai jogar... não vai jogar nessas duas (retas). // S1:(silêncio, olhando para a tela do computador pensativo): Puxa, danou! // S2: Joga um ponto aqui, (mostrando uma distância com o polegar e o indicador de uma mão, na tela do computador); aí a gente vai ter que achar uma distância que seja igual a essa daqui, aqui... Mas aí aqui não vai ser igual. // S1: Tô pensando em fazer pra lá. Porque o A tá aqui... num dá, P e A estão alinhados com a fonte. [...] S1: Então, se eu tenho um ponto nessa reta aqui, o ponto nessa (outra) reta, ... 60º, né!?. (OLIVEIRA, 2017, 103-104)

Resultados produzidos nas análises da outra pesquisa de campo aqui indicada (PINHEIRO, 2018) corroboram com o que vimos entendendo como uma potencialização do computador para trabalho com geometrias que lidam explicitamente com o movimento. O pesquisador propôs uma situação baseada no conhecido problema do tesouro do pirata, disponível na *internet*. Ele adaptou para a procura por uma cápsula de tempo enterrada em um campo de futebol que foi remodelado em suas posição e dimensões.

O diálogo abaixo se dá em um momento em que os sujeitos já haviam conseguido solucionar o problema e relata o poder heurístico do comando ´arrastar´ que o Geogebra disponibiliza, quando manipulado em movimentos organizados e afins com os movimentos geométricos que as transformações pertinentes implicam:

> **Aluna B1:** é a possibilidade de movimento que dá a garantia, o ponto F é fixo independentemente da posição do ponto E.
>
> **Pesquisador:** e todo o resto que fizeram? Não é relevante?
>
> **Aluna B1:** é sim. **Se** tivéssemos feito uma construção errada, na hora de mover o ponto E poderia dar tudo errado, poderia desconfigurar tudo. Então, acho que o ponto F não varia por causa das construções, das propriedades que utilizamos.
>
> **Aluno F1:** são as coisas que não variam com o movimento, e elas não variam porque no percurso fomos construindo perpendiculares, igualdades. **O** que faz validar é o movimento.
>
> **Aluno B1:** **é** isso mesmo. Se a gente não movesse o ponto E não veríamos que F não varia. (PINHEIRO, 2018, p. 110-111).

Os sujeitos acima são graduandos em Matemática. Eles não têm pudores em tomar a potencialidade dinâmica do *software* como um valor epistemológico, conjugando-a com o conhecimento que já têm. Constituem um novo conhecimento buscando critérios, e o *movimento* se torna uma operação com estatuto matemático. Entendo que o dinamismo da Geometria consubstanciada na estruturação dinâmica do *software* é tomado por eles como uma tarefa de validação teórica.

Num momento já de reflexão sobre uma sessão didática realizada, um sujeito manifesta uma possível importância epistemológica do *software* gráfico para a estruturação de uma geometria:

> **Aluno A2:** eu tô pensando aqui na questão dos invariantes. Quando movemos algo, e tudo que foi construído no percurso do exercício se mantém, a gente visualiza que se mantém porque movimentamos ali, mas, em um desenho no papel, não tem como fazer isso. (PINHEIRO, 2018, p. 114).

Geometria sem compasso

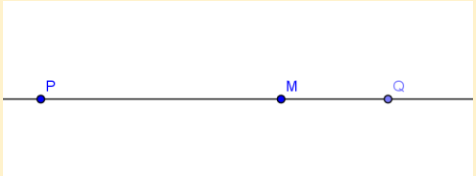
A Geometria Projetiva é coloquialmente dita a da régua, sem compasso. De fato, sua métrica é mais restrita que a euclidiana – esta, cheia de relações entre medidas lineares e/ou angulares. Como é do conhecimento de quem já a estudou, basicamente uma relação métrica é que se mostra em sua estrutura: a razão anharmônica, justamente porque ela é invariante em projeção sobre um plano. Essa Geometria também é caracterizada por não ter em seu espaço a possibilidade de retas paralelas.

Essa sua característica acaba abrindo, como eu entendo, uma maior agilidade em seus traçados gráficos geométricos, se compararmos soluções sobre mesmas situações feitas com régua e compasso. Essa agilidade tanto pode ser percebida se o meio expressivo é o lápis sobre o papel quanto num programa gráfico em computador.

Num material didático sobre Geometria Projetiva do qual participei da elaboração (FIGUEIREDO, 2018) propusemos um confronto: dada o problema abaixo, resolvê-lo primeiro com uso de régua e compasso; depois, só com o uso da régua. Foram feitos estudos com régua e compasso sobre papel e, depois, usando o Geogebra, quando foi discutido o que representava ali lidar-se só com a régua. Todo o encaminhamento foi feito com todos participando, pesquisadores e estudantes:

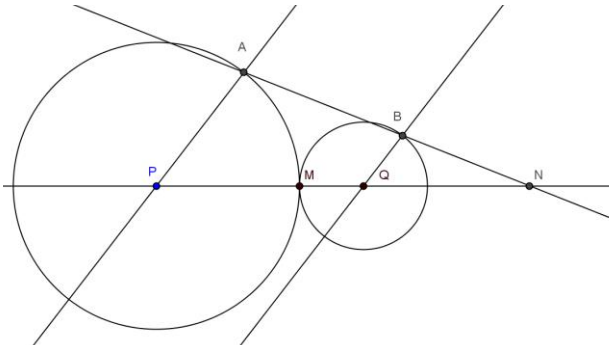
Figura 2: Exemplo de situação proposta

Obtenha o conjugado harmônico de M em relação aos pontos P e Q.



Fonte: Figueiredo, 2018, adaptado

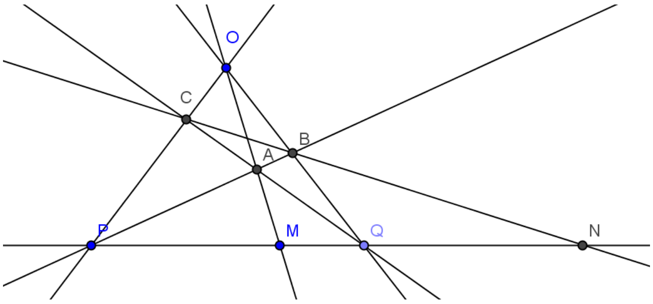
Figura 3: Reporte da primeira solução da situação proposta



Na primeira solução, baseada na semelhança de triângulos, traça-se uma reta qualquer por P, e uma paralela a ela por Q. Marca-se na primeira a medida PA – com o círculo (P, PM); na segunda, a medida QB – com o círculo (Q, QM). A reta AB dá o ponto N, o conjugado harmônico procurado.

Fonte: o autor

Figura 4. Reporte da segunda solução da situação proposta



Na segunda solução, baseada em feixes anharmônicos, arbitra-se O, traçar-se as retas OP, OM e OQ. Arbitra-se uma reta por P, dando A e B. Traça-se a reta QA, obtendo-se C e, finalmente, traça-se a reta CB, obtendo-se o conjugado N.

Fonte: o autor

O grupo envolvido, comparando as duas soluções e sem se deixar levar pelo fato que a segunda tem mais linhas aparentes, identificou uma palavra chave para julgar a mais ágil: ´arbitra-se´. Essa aleatoriedade acelera a solução. A percepção disso havia sido uma das intenções ao propor essa sequência no material. Mesmo argumentando que no Geogebra o traçado de paralelas é imediato - ao contrário do uso do compasso real, quando esse traçado tem uma série de passos – todos concordaram ser a solução projetiva mais ágil, uma vez que os feixes que sustentam a solução se tornam operadores geométricos que funcionam sendo cortados por quaisquer transversais, e não, *particularmente*, por paralelas.

Nessa pesquisa, nove sujeitos graduandos em Matemática tiveram acesso a um curso introdutório de Geometria Projetiva e desenvolveram exercícios em conjunto usando também o Geogebra como ambiente de investigação. Sobre a importância do *software* na compreensão dessa que era uma nova Geometria para eles, ao final de três sessões responderam a algumas perguntas, duas delas com as manifestações que reportamos abaixo:

Quadro 2: Recortes de manifestações de sujeitos a perguntas feitas

As situações trabalhadas com o GeoGebra foram interessantes? Permitiram a você se sentir praticante no projetivo? Fale sobre.
"as situações trabalhadas me possibilitaram entender a geometria projetiva como uma ferramenta bastante útil matematicamente." "o GeoGebra ajuda em muito do didatismo, deixando as explicações muito mais claras e objetivas, mais palpáveis." "sendo o *software* um aplicativo dinâmico, pude perceber a ideia de feixe com uma maior amplitude do que seria sem o GeoGebra."
Fale como você viu a potencialidade que o GeoGebra tem para se trabalhar situações projetivas.
"Como a geometria projetiva utiliza em suas construções essencialmente retas, o GeoGebra se torna uma ferramenta de grande potencialidade." "é uma ferramenta muito potente, no caso das atividades projetivas o GeoGebra ajudou a enxergar onde as construções queriam chegar..." "gostei muito da geometria projetiva como um todo, principalmente da parte infinitesimal, com o GeoGebra conseguimos ver na prática [...]." "Apesar do GeoGebra não ter sido pensado para trabalhar a geometria projetiva, ele se demonstrou últil pois muitos conceitos da geometria euclidiana são usados na projetiva, o que o software consegue abordar e, portanto, tem um bom potencial para a projetiva."

Fonte: Figueiredo, 2018, p. 44-46

No quadro acima recortei da publicação original respostas que ajudam a corroborar com a questão principal deste artigo. Nelas, num sentido geral, vemos que o Geogebra se tornou um aliado dos estudantes para lhes dar um fundo visual, sinestésico e ferramental para melhor compreenderem o novo espaço que a eles se apresentava, o espaço projetivo.

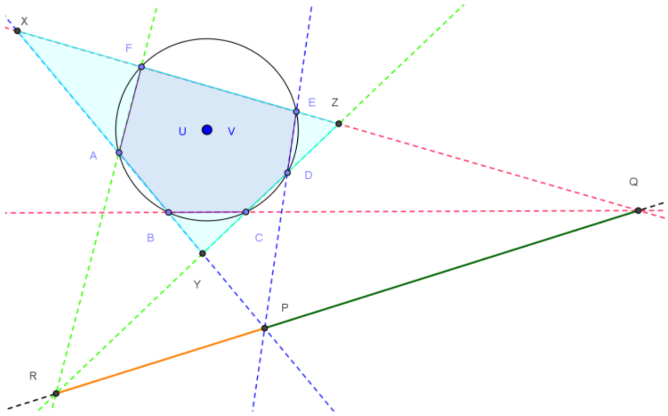
Ao dizer que a Geometria Projetiva se apresentava como uma ferramenta matemática um sujeito, conforme interpretei, quer aliá-la com a agilidade que ganhou no *software*. Por exemplo, lidar com feixes anharmônicos, em que seus centros e seus raios podem ser arrastados livremente sem ocasionar perda de propriedades, como enfatizou outro respondente, é um ponto de encontro significativo entre as possibilidades do *software* e a dinâmica do objeto geométrico.

As duas últimas respostas se remetem a uma ação do pesquisador realizada com auxilio de *data show*, quando este, usando o comando ´arrastar´, dinamizou uma situação gráfica baseada no Teorema de Menelau, carreando uma reta secante a três lados de um triângulo numa intuitiva ´tendência ao infinito´, quando essa reta se aproxima de ser paralela a um dos lados, e o teorema se particulariza na formulação célebre de Tales. Interpreto dessas respostas que os sujeitos entendem a potencialidade do *software* para a Geometria Projetiva quando ele toma os objetos geométricos euclidianos – segundo um sujeito os que estruturam o Geogebra – e agiliza construções que oportunizam o infinito ser tematizado e, de um modo dinâmico, modelado.

Do trabalho de Vieira (2016) apanhamos situações da pesquisa de campo nas quais os sujeitos vivenciam a projetividade no computador e atribuem significados geométricos junto ao *software*. Ela realizou atividades com graduandos em Matemática que aceitaram convite para as sessões programadas com atividades envolvendo teoremas da Geometria Projetiva a serem realizadas a partir de aplicativos desenvolvidos no Geogebra.

Essa pesquisadora propôs, numa sessão, uma sequência dinâmica abordando o teorema conhecido como hexágono de Pascal - um hexágono inscrito num círculo têm seus lados opostos em retas que, duas a duas, se cortam em três pontos que são colineares. É um teorema que, portanto, explora um forte invariante projetivo, a colinearidade.

Figura 5. Discussão do teorema de Pascal a partir de aplicativo



Fonte: Vieira, 2016, p. 132.

É certo que procedimentos euclidianos podem vir e demonstrar esse teorema, juntando o teorema de Menelau e a teoria de potência de ponto em relação a um círculo, mas, como a proposta era ocupar os horizontes projetivos a ambientação no Geogebra tomou outros caminhos e ocupações. A primeira ação no aplicativo que os sujeitos exploraram foi a própria invariância que dá conteúdo ao teorema de Pascal: construída uma situação exemplar e desenhada em cor distinta a reta que representava a colinearidade dos tais três pontos, os estudantes arrastaram livremente os vértices do hexágono, definidos sobre o círculo, e confirmaram a permanência da colinearidade.

Esses movimentos livres logo levaram os estudantes a perceber que o hexágono poderia ser estrelado, e a invariância se mantinha. Na experiência de todos foi um simples passo, favorecido pela dinâmica do software, mas, como entendo, importante em contribuir um pensamento geométrico mais abrangente sobre polígonos, uma vez que é usual só se trabalhar com modelos não estrelados.

Na sequência, a pesquisadora expôs uma surpresa a todos, que ela preparou com esse propósito. O aplicativo que deu origem às primeiras ações – círculo dado e hexágono inscrito -, na verdade não continha um círculo, mas uma elipse, que ela juntou os focos na primeira apresentação. Quando ofereceu a eles a possibilidade de desvendar essa elipse, afastando os focos, e eles foram percebendo que o hexágono – sempre definido para ser inscrito – continuava com seus lados opostos prolongados gerando três pontos sempre colineares, houve algo como uma comoção intelectual. O vivenciamento visual e sinestésico de confirmarem o que sempre ouviam falar, a saber, que as cônicas *são* projetivas por excelência, foi oportunizado pelo *software*, e os estudantes, com pouco dispêndio de tempo, passaram a trabalhar as mesmas ideias em parábolas e hipérboles.

Na sequência das ações, entre outros, veio um questionamento dos próprios estudantes se o teorema só seria válido para hexágonos. Saliento aqui que esta não é uma simples questão, e ela foi levada adiante numa discussão plenária na qual os próprios pesquisadores só se sentiram mais seguros devido ao suporte que o Geogebra dava para argumentações. Surgiu uma proposta de se fazer outro aplicativo para o caso de um pentágono inscrito, mas venceu uma proposta de se partir do hexágono mesmo – já com os traçados anteriores, inclusive a reta que informava a colinearidade final -, uma vez que o programa dava agilidade para se aproximar dois vértices até eles coincidirem.

Acompanhando essa proposta, todos puderam ver que ao arrastar um vértice para coincidir com um adjacente a reta do lado definido pelos dois continuava simplesmente a existir, como reta tangente. A tela ia mostrando a viabilidade da investigação, mostrando a reta tangente como uma das opostas, e, no final, a colinearidade mantida. Empolgados com essa dinâmica, os estudantes já foram partindo para o caso de um quadrilátero – fazendo mais dois vértices coincidirem - e, finalmente, para o caso do triângulo, constituindo, para este, um subteorema: ´as tangentes traçadas pelos vértices de um triângulo inscrito num círculo encontram, cada uma, a reta do lado oposto em três pontos que são colineares´.

Argumento que esses relatos advindos de Vieira (2016) expõem o Geogebra como um ambiente que abriga a dinâmica das transformações projetivas enquanto estas dão invariâncias abrangentes para *família* de figuras – retas, curvas, polígonos, etc. -, tendo esse *software* o poder configurado para se abarcar vários casos sob uma mesma definição geométrica.

Considerações finais

Recupero aqui algumas categorias de pesquisadores, publicadas há muitos anos, já com sentido profético. Tikhomirov (1981), psicólogo russo, afirmava que o computador não viria, numa atividade humana em geral, necessariamente para substituir o homem, nem mesmo simplesmente para auxiliá-lo em suas tarefas: ele viria como um reorganizador de ambientes. Pensando pedagogicamente, o computador apresentou possibilidades de outras tarefas, que acabam redimensionando – ou podendo redimensionar onde isso ainda não ocorreu – a sala de aula com seus currículos e objetivos educacionais.

Noss e Hoyles (1996), como o olhar de educadores matemáticos, taxavam que se o computador fosse inserido na sala de aula de Matemática para incrementar procedimentos tais como já vinham se fazendo sem ele, melhor seria não implementá-lo. Esses pesquisadores, na publicação citada, mostram como em atividades abertas com um *software* não diretivo como o Geogebra – na verdade, pesquisavam usando o Cabri Geometre – os estudantes produziam conhecimentos não só novos para eles como surpreendentes para seus professores, ainda que dentro do propósito que estes *organizavam* atividades abertas.

Todas essas ideias se dirigem a dizer que currículo é o que se exerce, realizando-o, e não um protocolo a ser cumprido. Para a educação geométrica estamos aqui, com isso, caracterizando algo muito além do que, por exemplo, é preconizado impresso em livros didáticos e na metodologia didática que decorre do seu uso massivo e determinante. Várias pesquisas nessa área substanciam a amplitude de possibilidades para com o ensino da Geometria, tal como vemos apontado no documento do ICMI que citamos no início deste artigo.

As pesquisas que trouxe para este texto mostram uma fecundidade que se abre quando se alia um *software* gráfico como o Geogebra com uma metodologia didática que alia investigação, interação e colaboração. No controle dos comandos e no horizonte aberto de significações pela tela, os estudantes podem efetivamente praticar uma espacialização, e não apenas dispor de um espaço que acolhe relações entre conhecimentos já constituídos.

Alguns resultados das quatro pesquisas enfocadas mostram a viabilidade de se trabalhar novas geometrias, tendo o conhecimento euclidiano dando fundo para novas atribuições de significados, o que permite sugerir que uma prática curricular mais abrangente pode ser possível.

As duas Geometrias que enfoquei neste artigo são, antes de mais nada, oportunidades para que um currículo permita os estudantes espacializarem, conscientes do que é isso como exercício epistemológico. Um certo desconforto ontológico aparece sempre que se abrem alternativas, mas isso pode vir mais como tarefa pedagógica do que como um ônus. Outros resultados das pesquisas citadas mostram o reconhecimento dos sujeitos manifestantes para a importância em formação profissional de ter tido a oportunidade de vivenciar modos alternativos de pensamento geométrico, colocando-os em outra perspectiva para com o conhecimento tradicional que tinham.

Penso que outras geometrias, outros modos de espacializar – que, como, dissemos, está sugerido na BNCC – aparecem possíveis numa coincidência temporal de uma atualidade na qual já temos uma maturidade de pensar uma pedagogia com-o-computador, este que tem o poder de reorganizar qualquer área de ensino. Neste texto, apontei seguidamente para isso com relação à Geometria. *Softwares* de Geometria dinâmicos, já há tempos, reconduziram a importância do pensamento geométrico, notadamente em sua versão sintética, e estabeleceram novas proximidades com os outros meios de pensar a Matemática, como o algébrico.

Especialmente para a Geometria das Transformações e para a Projetiva, como tratado aqui, dissemos que são geometrias do movimento. Foram criadas ou aperfeiçoadas no século XIX, quando os meios de registro e de expressão eram o lápis, o compasso, a régua e o papel. Mas a primeira serviu muito aos físicos para modelar os eventos onde as mudanças ocorrem e geram objetos no mundo. A segunda já há muito servia para os pintores trazerem o objeto a representar para uma nova posição – e mais – para uma nova configuração.

Portanto, quando argumentamos que um *software* gráfico vem para potencializá-las, talvez queiramos dizer que ele foi criado para modelar o dinamismo segundo o qual se dão os eventos do mundo, que são livres de referenciais estáticos e suscitam relações mais ampliadas que simplesmente as congruências.

Referências bibliográficas

CATUNDA, O. et al. **As transformações geométricas e o ensino da Geometria**. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1990.

DIENES, Z., GOLDING, E. **Exploração do Espaço**. São Paulo: Melhoramentos, 1959.

FIGUEIREDO, M C. **Uma proposta de trabalho didático com a geometria projetiva**. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2018.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of Mathematics structures**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co, 1983.

INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICS INSTRUCTION - ICMI. **Perspectives on teaching of geometry for the 21st century**. In: Education Studies in mathematics, v. 28, 1995.

KLEIN, F. *O programa de Erlangen*. in: FERNANDES, N. C. (Trad.) **O programa de Erlangen de Félix Klein**: considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas. São Paulo: Ifusp, 1984, 2-78.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base nacional comum curricular*. Brasília, DF, 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: nov. 2018.

NOSS, R. & HOYLES, C. (1996) **Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers** – Mathematics Education Library; v. 17.

OLIVEIRA, D B S **.** **A constituição de conhecimento colaborado em geometria das transformações com ferramentas dinâmicas**. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2017.

PIAGET, J., GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Traduzido por Maria F. M. R. Jesuíno. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PIAGET, J. & INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PINHEIRO, J M L**. O movimento e a percepção do movimento em ambientes de Geometria Dinâmica.** Tese de doutorado (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática), UNESP, Rio Claro, 2018.

TIKHOMIROV, O. K. **The psychological consequences of the computerization**. In: Werstch, J.: The concept of activity in soviet psychology. New York, Sharp, 1981.

VIEIRA, M D. **Uma proposta de trabalho didático com a geometria projetiva**. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2016.