Educação Matemática Sem Fronteiras, Chapecó, v. 1, n.1, p. 1 - 22, jan-junho, 2019.

EMSF

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

RESOLUTION OF GEOMETRIC PROBLEMS

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas [1]

Resumo

Neste artigo apresentamos resultados de uma pesquisa qualitativa realizada em uma disciplina de Geometria, ministrada pelo autor, no primeiro semestre de 2018. O estudo teve como objetivo geral investigar de que forma alunos em ação continuada de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática aplicam a Metodologia de Resolução de Problemas em problemas geométricos. Inicialmente, foi proposto um problema sobre geometria plana para cada dois sujeitos, sem que soubessem que o colega estava respondendo a mesma tarefa o mesmo. No total, foram três problemas. Após cada um resolver o seu, foi promovido o encontro da dupla para discutir a solução e chegar ao consenso. Na sequência, cada dupla apresentou sua atividade ao grande grupo, o que proporcionou uma visão geral sobre a metodologia empregada. Como conclusão, os participantes foram coesos em afirmar que a metodologia empregada proporcionou melhor compreensão do conteúdo ao ser aplicada a problemas envolvendo triângulos em situações reais. Pelo poder de argumentação, realizado no transcorrer da atividade por parte dos estudantes, o investigador concluiu que o objetivo da investigação foi alcançado.

Palavras-Chave: geometria plana; problemas; ensino de geometria; elementos de triângulos.

Abstract

In this article we present the results of a qualitative research carried out in a discipline of Geometry, given by the author, in the first semester of 2018. Its general objective was to investigate how students, in continuous action, in a Post-Graduation Program in Science and Mathematics Teaching, apply the Problem Solving Methodology on geometric problems. It was proposed a problem on flat geometry for each two subjects, without one knowing that the colleague was responding the same. Thus, three problems were proposed in total. After each one solved his, the meeting of the pair was promoted to discuss the solution and reach consensus. In the sequence each pair presented their problem to the group which provided an overview of the methodology used. In conclusion, the participants were cohesive in stating that the methodology employed provided a better understanding of the content in applications to problems involving triangles in real situations. The researcher concluded that the objective of the research was achieved, especially by the power of argumentation carried out in the course of the activity by the students.

Keywords: plain geometry; problems; geometry teaching; elements of triangles.

Introdução

A resolução de problemas é uma metodologia de ensino que tem sido utilizada ao longo dos tempos por matemáticos e, mais recentemente, por educadores matemáticos. De acordo com Hiebert *et al.* (1996), há duas visões a serem levadas em consideração: uma é a estrutural, na qual o conhecimento adquirido pelo aluno é representado e

[1] Doutor em Educação (Matemática). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Franciscana de Santa Maria - UFN – leivasjc@ufn.edu.br

organizado internamente, no sentido de destacar relações entre as informações atinentes ao problema e o que ele leva da sala de aula; a outra é a funcional, a qual se concentra na atividade de sala de aula.

Os autores apresentam a ideia de Dewey (1929), a respeito de como lidar com o conhecimento adquirido pelo aluno ao finalizar uma aula, o qual resulta da atividade de resolver situações problemáticas. Eles indicam o que Brownell (1946) afirmou ser a compreensão vista mais como um subproduto da atividade do que como um alvo direto de instrução. Apresentam, ainda, uma terceira visão, mais atual para os autores, que é a de Davis (1992), de que um resíduo que fica para trás quando os estudantes resolvem problemas. Esse resíduo fornece uma maneira de falar sobre os entendimentos que permanecem após o término de uma atividade. (HIEBERT *et al.*,1996)[2].

O *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM, em seus *Principles and Standards for School Mathematics*[3], indica que um currículo é mais do que uma coleção de atividades; deve ser coerente, focado em Matemática importante e bem articulado em todos os anos escolares. As ideias matemáticas necessitam estar ligadas e construídas cumulativamente para haver compreensão e para que o conhecimento dos estudantes se aprofunde no decurso de seu desenvolvimento escolar. Para isso, o documento sugere que, no currículo, sejam preparados para que eles possam continuar estudando e resolvendo problemas em uma variedade de ambientes escolares, domésticos e de trabalho. Além disso, recomenda "Um currículo bem articulado desafia os alunos a aprenderem ideias matemáticas cada vez mais sofisticadas, à medida que continuam seus estudos."[4] (p. 2)

A respeito de resolução de problemas, o documento indica, explicitamente, que

> [...] resolver problemas não é apenas um objetivo de aprender Matemática, mas também um meio importante de fazê-lo. É parte integrante da mesma, não uma parte isolada do programa de Matemática. Os estudantes precisam de oportunidades frequentes para formular, lidar e resolver problemas complexos que envolvem uma quantidade significativa de esforço. (p.4)

---

[2] Referência retirada de WALLE, J.A. Van de, **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. Ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 2009.

[3] A referência a esse documento foi retirada de *Principles and Standards for School Mathematics* Executive Summary (2006). Disponível em <https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf> Acesso em 16 jul. 2018.

[4] Todas as traduções são de responsabilidade do autor.

O mesmo documento, em nosso entender, explicita a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, na medida em que sugere que os estudantes

> [...] devem ser encorajados a refletir sobre seu pensamento durante o processo de solução de problemas, para que possam aplicar e adaptar as estratégias que desenvolvem a outros problemas e em outros contextos. Ao resolver problemas matemáticos, os alunos adquirem maneiras de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, além de confiança para enfrentar situações desconhecidas que ocorrem fora da sala de aula de matemática. (p.4)

Por compactuarmos com tal forma metodológica de ensinar conteúdos envolvidos em situações-problema reais, sem explicitação deles, mas com necessidade de interpretação e identificação dos tópicos envolvidos, propusemos um elenco de problemas envolvendo elementos de triângulos como, por exemplo, mediatrizes, necessários para as respectivas soluções em uma turma de um programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, na disciplina de Geometria: ensino e aprendizagem, ocorrida no primeiro semestre de 2018, cuja análise é o objeto do presente artigo.

Resolução de problemas e ensino de Geometria

No clássico A Arte de Resolver Problemas, Polya (2006) afirma que um dos deveres do professor é auxiliar os alunos no seu desenvolvimento intelectual. Para tal, deve, por um lado, ter a preocupação de não deixá-los sozinhos, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, mas, por outro lado, não deve auxiliá-los demais nem de menos. Nessa busca de auxílio, deve promover muitas perguntas que lhes possibilitem resolver o problema sozinhos, sempre considerando generalizações e bom senso. Para isso, o autor apresenta quatro fases da metodologia:

1. Compreensão do problema – nessa fase, o estudante deve ler muitas vezes o problema, tentando compreendê-lo, destacando os dados e as incógnitas, demonstrando interesse por encontrar a solução;
2. Estabelecimento de um plano – uma das questões que devemos priorizar sobre a resolução de problemas em Matemática, em nosso entender, é pensar, primeiramente, no problema, e elaborar uma estratégia de solução a partir de conhecimentos prévios, experiências já realizadas e correlatas ao tema. Muitas vezes, os estudantes já começam

tentando aplicar alguma fórmula pronta para a resolução, sem ao menos sequer criar alternativas próprias;

3. Execução do plano – elaborado e revisado seu plano, deve partir para a resolução, seguindo-o atentamente. A fim de que o aluno se empolgue na resolução e siga seu plano, consideramos importante ter um registro por escrito desse plano e que o siga ao longo da resolução;
4. Retrospecto – alcançada a solução do problema, é importante que o aluno a retome, a fim de verificar se todas as condições dadas foram utilizadas e empregadas na sua resolução. Isso, algumas vezes, faz com que sejam necessárias novas imersões no problema, quando o mesmo não atendeu determinadas condicionantes.

Como vimos na introdução, há muitas abordagens sobre a metodologia de Resolução de Problemas, e cabe nos questionarmos: o que é um problema?

Van de Walle (2009), ao citar Hiebert *et al.* (1996), afirma que "um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método 'correto' específico de solução". (p.57). Para o autor, um problema que se dirija à aprendizagem matemática deve possuir as seguintes propriedades:

1. O problema deve começar onde os alunos estão, ou seja, partir da compreensão atual dos estudantes, e não de algo completamente distante do estágio de conhecimento em que se encontram, de modo a torná-lo desafiador;
2. O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à Matemática que os alunos vão aprender, ou seja, dar significado aos conteúdos;
3. A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos, com isso, desenvolvendo uma importante habilidade, que é elaborar justificativas para o processo de construção.

Uma terceira abordagem da Resolução de Problemas, a qual nos interessa destacar neste texto, é a definida por Onuchic e Allevato (2009), que a denominam de Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Para as autoras, essa metodologia apresenta uma forma mais atual de conceber a avaliação. Aspecto com o que nos coadunamos, em particular, nos propósitos do presente artigo. Afirmam as autoras que "[...] Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário” (p.6).

As autoras inferem que a metodologia não se conjuga com aquela de regras prontas, que indicam como fazer, privilegiando-as, e sim com um trabalho no qual um problema é o ponto de partida e a orientação para a aprendizagem e para a construção de conhecimentos. Na proposta das autoras, a metodologia consiste em:

1. Preparação do problema – nessa fase, há seleção de um problema que vise à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento;
2. Leitura individual – o professor fornece um problema por escrito a cada aluno, solicitando sua leitura e compreensão;
3. Leitura em conjunto – são formados grupos para uma leitura e compreensão coletiva;
4. Resolução do problema – não havendo dúvidas quanto à compreensão do problema, os alunos, em grupos, em trabalho colaborativo, buscam a solução;
5. Observar e incentivar – o professor não é mais o transmissor do conhecimento, e sim o observador, analista, mediador, incentivador;
6. Registro das soluções na lousa – nessa fase, cada grupo indica um representante para apresentar a solução na lousa;
7. Plenária – todos os alunos são convidados a discutirem as soluções apresentadas;
8. Busca de consenso – após serem sanadas as dúvidas e analisadas as soluções e resoluções, ocorre a busca de um consenso sobre o resultado correto;
9. Formalização do conteúdo – há a apresentação, por parte do professor, de forma organizada e estruturada, em linguagem matemática, do conteúdo envolvido.

Com base nessa pequena descrição sobre Resolução de Problemas, na visão de três importantes autores, podemos perceber a convergência entre elas, distinguindo-se por alguns pequenos encaminhamentos, mas todos com a mesma intencionalidade, a saber, a busca pela autonomia do estudante na aquisição de conhecimentos matemáticos a partir de um problema desencadeador. Além disso, a mediação do professor, no desenrolar da atividade, é extremamente relevante para o bom desenvolvimento da metodologia, uma vez que é necessário, em nosso entender, que ele esteja presente durante o processo, questionando, orientando, analisando e, finalmente, sintetizando.

Na sequência do artigo, apresentamos os procedimentos metodológicos envolvidos na pesquisa realizada.

Procedimentos metodológicos

A pesquisa, cujos resultados estão descritos no presente artigo, teve caráter qualitativo, no sentido apontado por Bauer e Gaskell (2015), para quem esse tipo "[...] evita números, lida com interpretações das realidades sociais e é considerada pesquisa *soft*." (p.23). Nesse tipo de pesquisa, os autores indicam:

Quadro 1. Estratégias qualitativas

Dados	Textos
Análise	Interpretação
Protótipo	Entrevista com profundidade
Qualidade	Soft

Fonte: adaptado de Bauer e Gaskell (2015, p. 23).

Os dados foram coletados por meio de registros realizados pelos investigados, num total de seis, todos eles participantes de uma disciplina de Geometria ofertada a mestrandos e doutorandos de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, sendo dois mestrandos e quatro doutorandos. Esses dados consistiram no registro escrito do 'plano de resolução', conforme a Metodologia de Resolução de Problemas, das resoluções utilizando o Geogebra (com o respectivo protocolo de construção), bem como um registro escrito denominado 'análise crítica', além das observações do pesquisador durante a realização das atividades. Tais registros foram encaminhados ao professor, por e-mail, no momento da conclusão das atividades, as quais foram realizadas em um laboratório de informática com o software instalado.

Bauer e Gaskell (2015) afirmam que um referencial de amostragem pode se constituir, "por exemplo, da lista de estudantes que estão prestando exame em uma universidade, o que é um referencial de amostragem para a população estudantil desse ano específico." (p.41). Assim, consideramos que os alunos da disciplina em questão constituem uma amostragem dos participantes do programa de ação continuada em questão. Além disso, segundo os autores, a "finalidade real da pesquisa qualitativa não é contar opiniões ou pessoas, mas ao contrário, explorar o espectro de opiniões, as diferentes representações sobre o assunto em questão." (p.68). Nesse sentido, a análise crítica produzida pelos participantes foi utilizada para o pesquisador validar o quanto a atividade de Resolução de Problemas tornou-se importante para a prática docente desses e dos futuros professores de Matemática, especificamente, no que diz respeito ao ensino de Geometria.

Em virtude de ser usado o Geogebra, para executar o plano de resolução de problemas, “[...] a expressão ‘a análise de dados qualitativos com auxílio de computador,’ [...] refere-se à análise interpretativa de dados textuais, na qual o software é usado para organização e tratamento dos dados.” (Bauer e Gaskell, 2015, p. 397). Isso é facilmente obtido a partir do protocolo de construção que o software disponibiliza e com o que contamos para a análise de dados na pesquisa.

No que diz respeito às entrevistas com profundidade, indicadas no Quadro 2, podemos compreendê-las, nesta pesquisa, como não sendo do tipo convencional, estruturadas ou semi-estruturadas com perguntas pré-elaboradas. Gaskell (2015) afirma que “[...] Além dos objetivos amplos da descrição, do desenvolvimento conceptual e do teste de conceitos, a entrevista qualitativa pode desempenhar um papel vital na combinação com outros métodos” (p.65) e isso nos remete aos enunciados dos problemas com questões desencadeadoras a serem respondidas durante a resolução, às explicações obtidas pelo protocolo de construção no Geogebra e à análise crítica dos indivíduos ao final, elaboradas de forma bem ampla e livre. Para o autor, tanto em entrevistas individuais quanto em grupo, “o pesquisador não orienta a investigação a partir de um conjunto de perguntas predeterminadas, como se faz em um levantamento ou questionário”. (p.73). Aqui, consideramos as orientações, em forma indagativa, a serem levadas em consideração na compreensão do problema e na busca de resolução.

Para desencadear a pesquisa, foram distribuídos, aleatoriamente, cartões de três cores diferentes, a saber, azul, laranja e amarelo, por ordem de ingresso na sala. A cada cor correspondia um problema distinto envolvendo a geometria plana, tema que estava sendo abordado nas últimas aulas da disciplina, juntamente com a Metodologia de Resolução de Problemas e o Geogebra, sem, entretanto, delinear qual era o conteúdo específico envolvido em cada um deles. Os alunos deveriam acomodar-se em computadores, separados e individualmente. De início, o professor distribuiu dois clips para a retomada do assunto Resolução de Problemas. (Quadros 2 e 3)

Em seguida, o professor entregou o problema correspondente à cada cor para o aluno, com o respectivo cartão, a fim de seguir os passos para resolvê-lo, inclusive, elaborando um rascunho do plano de execução do mesmo.

Quadro 2. Primeiro clip distribuído.

Polya (2006)	Algumas orientações por etapa
Busca agrupar as indagações e sugestões para a resolução de um problema em quatro fases de trabalho: 1ª. compreender o problema - deve-se perceber claramente o que é necessário; 2ª. estabelecimento de um plano - deve-se verificar como os diversos itens estão relacionados e como a incógnita está ligada aos dados, para estabelecer um plano de resolução; 3ª. execução do plano - colocar em ação o que for designado no plano; 4ª. retrospecto da resolução - rever e discutir a solução obtida à luz do que o problema exigia.	1ª. o problema deve ser bem escolhido pelo professor, nem muito difícil, nem muito fácil, natural e interessante. O enunciado deve ser claro e bem entendido e o professor pode levantar indagações (Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?) Se houver uma figura ou intuir alguma do enunciado, esboce rapidamente, explicitando a incógnita. Observe que, na compreensão do problema, há dois estágios, familiarização e aperfeiçoamento da compreensão. 2ª. a elaboração do plano é um caminho árduo, pode ser longo, mas é o principal feito na resolução de um problema. Nem sempre o plano é obtido de imediato, pode ser retomado, reformulado. O professor pode indagar e dar sugestões. Pode sugerir ao aluno buscar algum problema similar que já tenha resolvido. 3ª. na execução do plano, bons hábitos mentais e concentração são fundamentais, além de conhecimentos anteriores sobre o tema, dando maior atenção ao objetivo. 4ª. o retrospecto é fundamental, pois proporciona uma reflexão e uma assimilação da solução obtida, especialmente na discussão, com os pares, da solução obtida.

Fonte: autoria própria.

Na sequência, foi distribuído o segundo clip.

Quadro3. Segundo clip distribuído.

Hiebert (1996)	Características
Indica que um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem exista uma percepção, por parte dos mesmos, de que haja um método 'correto' específico. No que diz respeito a um problema voltado para a aprendizagem matemática, também possui características específicas.	• *Um problema deve começar onde os alunos estão*. O projeto ou seleção de tarefas deve levar em consideração a compreensão atual dos estudantes • *O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à Matemática que os alunos vão aprender. Ao resolver o problema ou fazer a atividade, os estudantes devem estar preocupados, principalmente, em dar significado à Matemática envolvida e, assim, desenvolver sua compreensão sobre as ideias.* • *A aprendizagem matemática requer justificativas e explicações para as respostas e os métodos. Os estudantes devem compreender que a responsabilidade para determinar se as respostas estão corretas e por que elas estão corretas, também é deles. A justificativa deve ser uma parte integrante de suas soluções.*

Fonte: adaptado de Van de Walle (2009, p.57).

Após todos resolverem, individualmente, o seu problema, sem que tivessem conhecimento de que havia um segundo colega também resolvia o mesmo, o pesquisador solicitou que os alunos que tivessem cores de cartões iguais se reunissem e discutissem o problema que havia sido designado para os dois. Após as compatibilizações oriundas do conhecimento do problema comum e das soluções individuais, deveriam entrar em um consenso a respeito das resoluções. A mediação do professor nessa etapa foi importante para que houvesse esse consenso.

Na próxima etapa, os dois indivíduos deveriam apresentar o seu problema ao grupo, discutindo e defendendo a solução encontrada e, dessa forma, durante um encontro de 4 horas-aula, foram desenvolvidas três atividades distintas, as quais serão analisadas na sequência, e que buscaram responder ao seguinte problema de pesquisa:

Como alunos, em ação continuada, em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, aplicam a Metodologia de Resolução de Problemas na resolução de problemas geométricos?

A fim de responder a esse problema, delineamos o objetivo geral da pesquisa: investigar de que forma alunos em ação continuada de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática aplicam a Metodologia de Resolução de Problemas na resolução de problemas geométricos.

Na sequência do artigo, faremos a apresentação das atividades, as respectivas resoluções, bem como as análises.

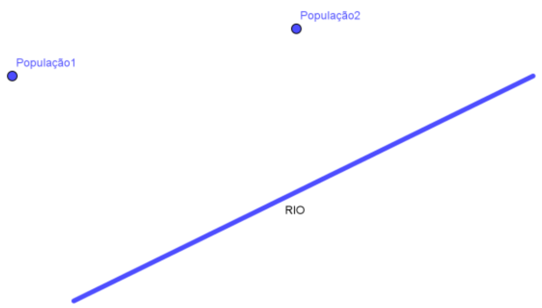
Problemas, soluções e análises

Como citado antes, foram distribuídos problemas sobre geometria plana cuja resolução deveria ser embasada na Resolução de Problemas, os quais são apresentados na sequência.

Problema azul

Este problema foi distribuído aos alunos aqui denotados por A e C.

Duas populações, P_1 e P_2, concordaram em construir uma área de piquenique ao lado do rio e não sabem onde fazê-la para que nenhum dos habitantes de qualquer uma das populações afetadas saia prejudicado. Onde eles devem construir a área de piquenique?



No que diz respeito à compreensão do problema, assim registraram por escrito[5]:

A: *que se deve encontrar uma região que não impeça o acesso das populações ao rio e entre elas.*
C: *é preciso encontrar uma área que seja equidistante de P_1 e P_2 e que seja do lado do rio*.

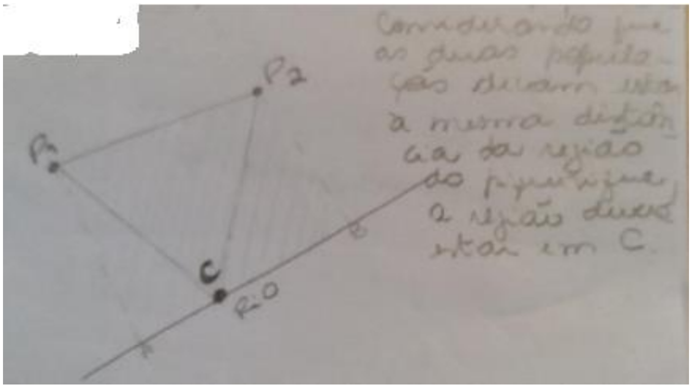
Ao que parece, a primeira etapa indicada por Polya (2006) e Van de Walle (2009), no que diz respeito a compreender o problema, além do recomendado por Onuchic e Allevato (2009), sobre a leitura individual do problema fornecido pelo professor, foram atendidas.

Na etapa seguinte, a elaboração de um plano, os dois estudantes registraram, conforme apresento a seguir.

A: *traçar a perpendicular entre P_1 e P_2 e a reta Rio; traçar segmento unindo P_1 e P_2. A área do piquenique deve ficar dentro da área formada por segmentos de reta (trapézio), para que esteja próximo, ao mesmo tempo, das duas populações.*

Ao incluir a imagem (Figura 1) em seu plano, a estudante reafirma o indicado por Polya (2009): quando houver alguma figura ou intuição a partir do enunciado, devemos proceder rapidamente, esboçando a incógnita do problema.

Figura 1 - Esboço gráfico constante do plano de A.



Fonte: dados da pesquisa.

A transcrição do registro da estudante é: *considerando que as duas devam estar à mesma distância da região do piquenique, a região deverá estar em C.*

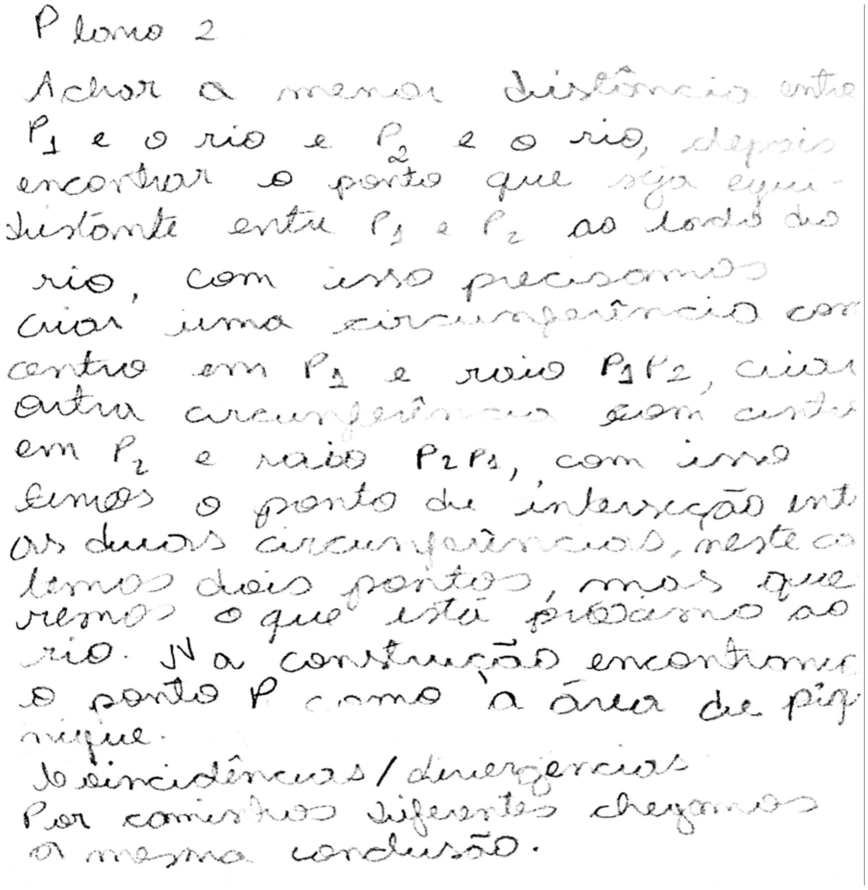
C: encontrar o ponto médio entre P_1 e P_2 *e, após, traçar uma reta perpendicular ao rio, passando pelo ponto médio criado.*

[5] As transcrições dos textos escritos a lápis são literais.

A estudante afirma que isso não se confirmou e retoma o seu plano, coerentemente com o indicado por Polya (2006), segundo o qual nem sempre o plano é obtido de imediato, uma vez que pode ser retomado, reformulado:

C: o primeiro plano criado não se confirmou, com isso precisamos elaborar outro plano para conseguir chegar à solução mais adequada.

Figura 2 - Segundo plano de resolução da estudante C.



Plano 2
Achar a menor distância entre P_1 e o rio e P_2 e o rio, depois encontrar o ponto que seja equidistante entre P_1 e P_2 ao lado do rio, com isso precisamos criar uma circunferência com centro em P_1 e raio P_1P_2, criar outra circunferência com centro em P_2 e raio P_2P_1, com isso temos o ponto de interseção entre as duas circunferências, neste caso temos dois pontos, mas queremos o que está próximo ao rio. Na construção encontramos o ponto P como a área de piquenique.
Coincidências/divergências
Por caminhos diferentes chegamos a mesma conclusão.

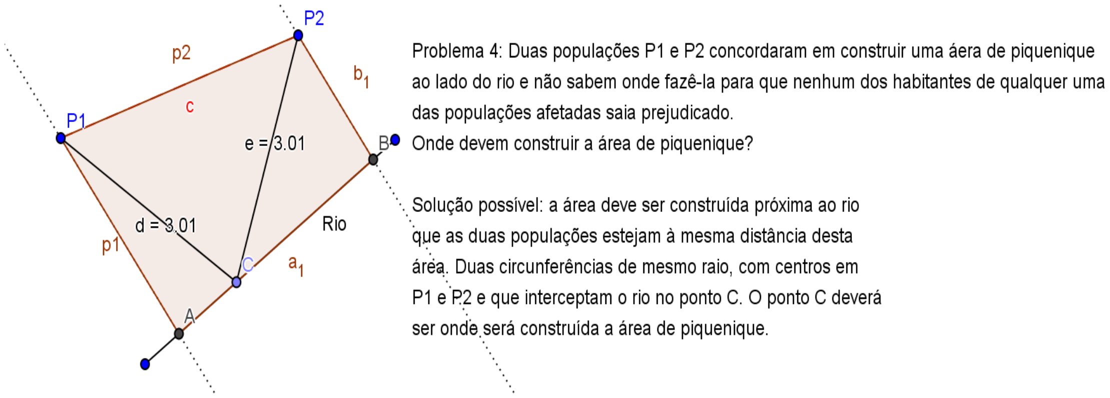
Fonte: dados da pesquisa.

De acordo com Onuchic e Allevato (2009), outras fases da metodologia são importantes, como a plenária e a busca de consenso, o que foi realizado quando as duas estudantes se reuniram para compararem as resoluções obtidas individualmente por elas, conforme consta no registro de ambas.

A e C: de modos (caminhos e planos) diferentes, chegamos à mesma solução: a área de piquenique deverá estar à mesma distância de P_1 e P_2 e o mais próximo possível do rio.

Na Figura 3, apresentamos a execução do plano realizado por A no GeoGebra.

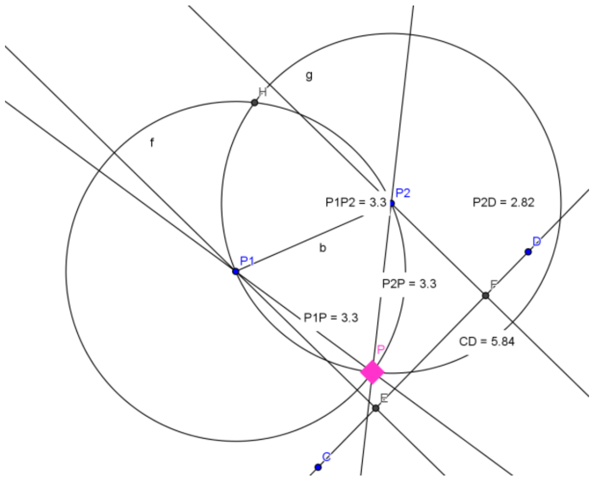
Figura 3 - Execução do plano de resolução no Geogebra.



Fonte: estudante A.

Na Figura 4, está a execução do plano pela segunda componente da equipe Azul.

Figura 4 - Execução do plano de resolução no Geogebra.



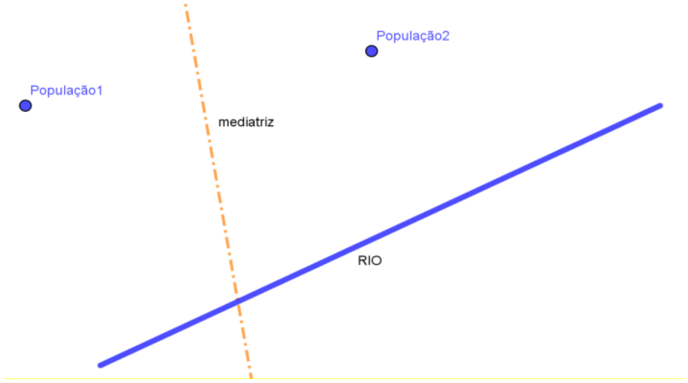
Fonte: estudante C.

Analisadas as duas soluções, houve o consenso de que aquela proposta apresentada por C era a mais apropriada, uma vez que, na primeira, a estudante não levou em consideração, por exemplo, que o ponto ou os pontos a serem obtidos estariam na mediatriz do segmento P_1P_2. Em outras palavras, ela encontrou o ponto por tentativa e não explorou a dinâmica do software e os conceitos geométricos envolvidos.

Quanto à solução de C, podemos perceber que a estudante localizou a mediatriz e considerou uma área maior, assinalada em vermelho, mas poderia ser um pouco mais próxima ou até mesmo distante, desde que pertencendo à mediatriz (não traçada na figura).

No retrospecto da resolução, o mediador fez as considerações necessárias à solução correta. Entretanto, podemos observar avanços, tanto no que diz respeito à conceituação matemática envolvida quanto no que se refere à exploração do software com um problema, o qual, incialmente, não apresentava nenhum indicativo de que se tratava de mediatrizes. Assim, na Figura 5, apresentamos a solução final, a qual indica a mediatriz (linha vermelha) entre as duas populações, e bastaria ser escolhido qualquer ponto desta, o mais próximo possível do rio, para atender ao solicitado. Portanto, não haveria um ponto específico a escolher.

Figura 5 - Solução do problema azul.



Fonte: dados da pesquisa.

Um problema dessa natureza, que envolve um conteúdo fundamental de geometria plana, pode introduzir uma forma interessante de desenvolver conteúdo geométrico, sem ser da forma ‘engavetada’, ou seja, sem seguir a definição, o exemplo e a resolução de exercícios padrão.

Para finalizar, consideramos o indicado por Onuchic e Allevato (2009) a respeito da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, uma vez que o pesquisador/professor avaliou a aprendizagem dos estudantes durante a realização da atividade em uma forma mais atual de conceber avaliação: “[...] Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino, com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário” (p.6). Nesse sentido, foi solicitado que os estudantes indicassem uma análise crítica sobre o trabalho desenvolvido.

Em síntese, assim se manifestaram as duas estudantes:

A: Enquanto docente de Ensino Médio, costumo buscar alternativas para despertar a curiosidade dos alunos e estimular sua participação nas atividades desenvolvidas em

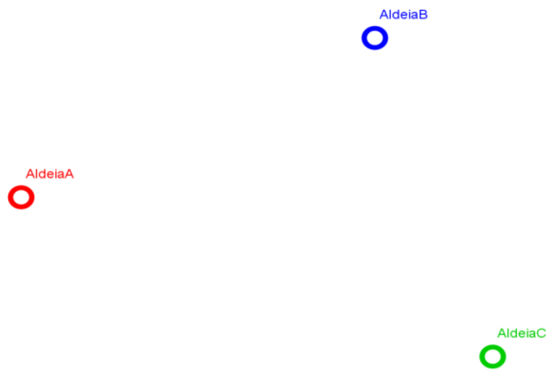
sala de aula. Uma das opções nesse sentido é propor, ao iniciar um novo conteúdo, uma situação problema que provoque uma discussão conduzindo à introdução do que será trabalhado. Entretanto, apesar de acreditar na importância do momento, ele não acontece de maneira muito estruturada. A realização da atividade, no dia 08 de junho, foi muito importante para que eu percebesse como pode ser feito para explorar, de maneira adequada, a resolução dos problemas propostos. A atividade foi desenvolvida utilizando os passos propostos para a Resolução de Problemas, a discussão em duplas e a exposição dos resultados. Essa organização também contribuiu para tornar a atividade desafiadora, o que considero muito importante no processo de aprendizagem.
Certamente a metodologia de Resolução de Problemas pode ser utilizada na Escola Básica e para o ensino da Geometria Plana. Quanto à atividade usando o Geogebra, acredito que, para a realização da atividade com os meus alunos do Ensino Médio, o Geogebra seria um dificultador no processo, porque eles nunca trabalharam com a ferramenta.
C: A metodologia de resolução de problemas permite que o aluno pense, antes de resolver as atividades propostas pelo professor, e crie conjecturas sobre a resolução e, mais tarde, durante a resolução da atividade, verifique se estão corretas ou não.
Com a atividade proposta na aula do dia 08/06/18 percebi como é importante trabalhar com a metodologia de resolução de problemas. No começo, senti um pouco de dificuldade em achar a resposta correta, mas, com o auxílio do professor, ficou mais fácil. Vale ressaltar que o professor não forneceu a resposta, mas sim fez com que eu pensasse de outras formas e buscasse o conhecimento que eu já possuía e assim pudesse adquirir novos conhecimentos. Acredito que isso seja uma grande vantagem da metodologia. Outro ponto importante da atividade é a socialização com os colegas, pois nesse momento percebemos que um problema pode ser resolvido de várias maneiras e chegar ao mesmo resultado.
Não vejo desvantagens na utilização dessa metodologia, talvez o que possa atrapalhar o bom desenvolvimento da atividade seja a falta de conhecimentos prévios dos alunos.
Acredito que a resolução de problemas, aliada ao uso do Geogebra, pode ser uma ótima forma de trabalhar a Geometria na Educação Básica, pois o aluno pode pensar, conjecturar e verificar suas respostas, de maneira dinâmica, e não apenas resolver centenas de exercícios repetidos a partir de um exemplo.

Pelas análises das duas estudantes, podemos intuir que a aprendizagem realizada em ação continuada poderá contribuir para a atuação futura destas, cumprindo com o objetivo da disciplina de Geometria ofertada ao Programa de Pós-Graduação no qual estão inseridas.

Problema amarelo

Os estudantes com codinomes D e F foram contemplados com o problema a seguir.

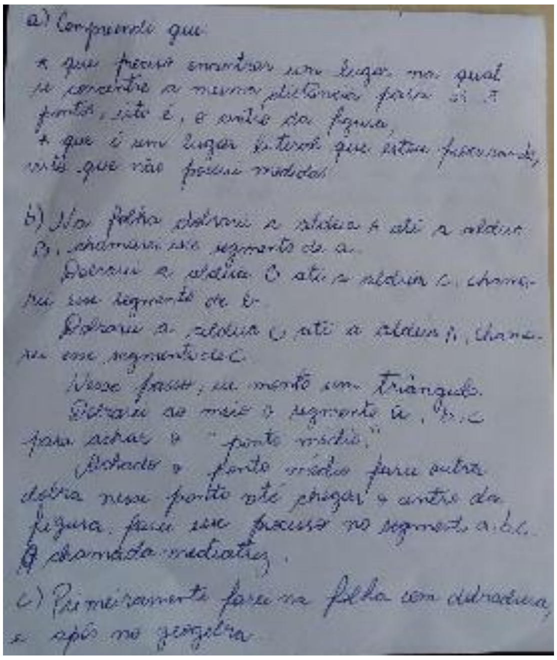
Uma empresa quer construir uma usina elétrica para abastecer três aldeias que não estão em linha reta. Qual é o lugar adequado para que a usina fique na mesma distância dos três povos e, portanto, o custo de abastecimento seja mínimo para a empresa?



Como na situação envolvendo o problema azul, inicialmente, as duas estudantes, uma de mestrado e outra de doutorado, independentemente, buscaram a compreensão do problema, conforme é recomendado pela Metodologia de Resolução de Problemas. Inicialmente, apresentamos o plano de execução elaborado por D.

O fato de a estudante ter imaginado, em seu plano, sua construção em uma folha, com a qual poderia obter segmentos de ligação entre os dois pontos representativos das aldeias e, posteriormente, pelas dobras, obter os pontos médios desses segmentos e as mediatrizes, foi bem criativo. Dessa forma, foi possível encontrar o ponto de encontro delas, que corresponde ao ponto de localização da usina. Ao que tudo indica, o problema foi bem compreendido e o plano bem elaborado (Figura 6).

Figura 6 - Plano de resolução do problema amarelo.



a) Compreendi que:
* que preciso encontrar um lugar no qual se concentre a mesma distância para os 3 pontos, isto é, o centro da figura,
* que é um lugar interno que estou procurando, visto que não possui medidas

b) Na folha dobrarei a aldeia A até a aldeia B, chamarei esse segmento de a.
Dobrarei a aldeia B até a aldeia C, chamarei esse segmento de b.
Dobrarei a aldeia C até a aldeia A, chamarei esse segmento de c.
Nesse passo, eu monto um triângulo.
Dobrarei ao meio o segmento a, b, c para achar o "ponto médio".
Usando o ponto médio para outra dobra nesse ponto até chegar o centro da figura. Farei esse processo no segmento a, b, c. É chamada mediatriz.

c) Primeiramente farei na folha com dobradura e após no geogebra

Fonte: registro de D.

A estudante F, professora no Ensino Fundamental, compreendeu rapidamente o problema e foi direto ao Geogebra, no qual registrou, em texto, seu plano de resolução, como consta na Figura 7.

Figura 7 - Plano de resolução do problema amarelo.

- Para que a empresa construa uma Usina Elétrica que fique na mesma distância das três aldeias, precisamos encontrar a INTERSERCÇÃO entre as Aldeias, ou seja, o ponto comum entre as três distâncias, as quais devem ser a mesma distância entre a Usina e a AldeiaA, entre a Usina e a AldeiaB e entre a Usina e a AldeiaC.
- Devemos primeiramente encontrar a mediatriz de cada Aldeia.

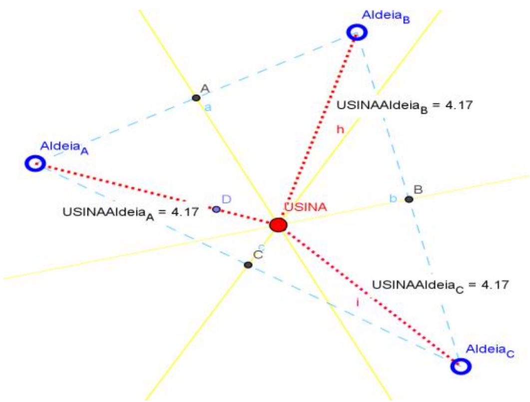
Como está atividade poderá ser explorada no Ensino Fundamental podemos proceder da seguinte maneira:

1) Traçar o segmento entre cada Aldeia (AB, BC e CA).
2) Formamos um Polígono (triângulo)
3) Encontrar o ponto Médio de cada segmento AB, BC e CA, ou seja, o ponto médio de cada lado do triângulo ABC.
4) Traçar uma perpendicular entre cada segmento AB, BC e CA e o seu respectivo ponto médio encontrado.
5) Encontrar o ponto de Intersecção entre as três retas perpendicular encontradas. Esse ponto de intersecção entre as perpendiculares será o ponto comum entre a distância deste ponto (denominado USINA) até cada Aldeia.
6) Para confirmar isso, devemos calcular a distância entre o ponto de Intersercção (USINA) até cada Aldeia.

Fonte: registro de F no Geogebra.

Simultaneamente, ela foi elaborando sua construção, no software, como pode ser visto na Figura 8, na qual demarca, em linhas tracejadas na cor azul, os segmentos unindo as aldeias com os respectivos pontos médios A, B e C, pelos quais obtém os pontos médios e as mediatrizes na cor laranja. A partir disso, determina o ponto de interseção das três, que corresponde à localização da usina. Vale ressaltar que a escrita dessa aluna deixa a desejar em termos de linguagem matemática, por exemplo, ao indicar a mediatriz de cada aldeia, sendo desejado que indicasse a mediatriz do segmento que une os dois pontos representativos da aldeia. Deveria indicar que traçou os segmentos entre os pontos que representam as aldeias e, posteriormente, as perpendiculares a cada um deles por seus pontos médios.

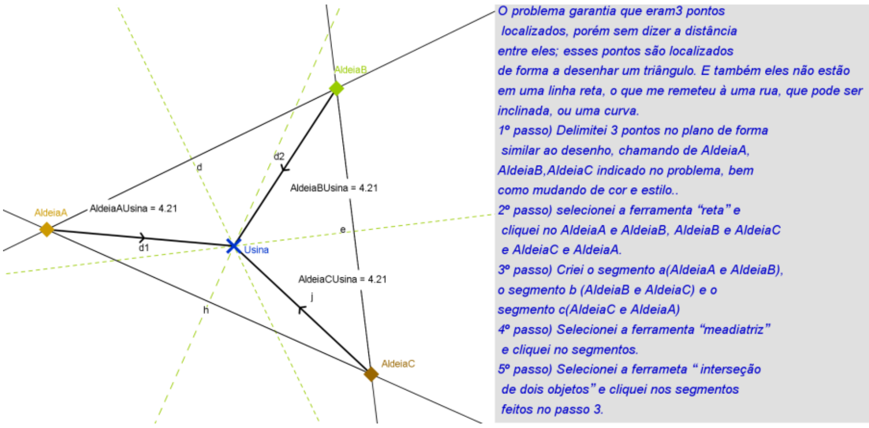
Figura 8 - Solução no Geogebra do problema amarelo por F.



Fonte: arquivo da pesquisa

Após se reunirem, concluíram que, embora os planos de resolução tenham seguido por caminhos distintos, ambos levaram à resolução correta do problema e indicaram possibilidade de desencadear conceitos como: triângulos e suas propriedades, ponto médio, mediatriz, intersecção, distâncias, dentre outros.

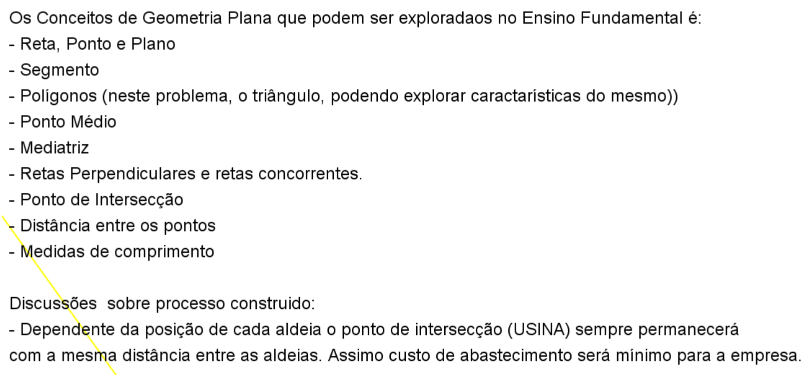
Figura 9 - Resolução do problema amarelo no Geogebra.



Fonte: registro no Geogebra feito por D.

Ao final da apresentação ao grande grupo, consolidada a solução do problema amarelo, a estudante F fez o registro constante da Figura 10, com relação a possibilidades de explorar, na escola básica, esse problema ou outros similares, durante o desencadeamento de conteúdo de Geometria, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental.

Figura 10 - Indicações de conteúdos de Geometria envolvidos no problema.


Os Conceitos de Geometria Plana que podem ser exploradaos no Ensino Fundamental é:
- Reta, Ponto e Plano
- Segmento
- Poligonos (neste problema, o triângulo, podendo explorar caractarísticas do mesmo))
- Ponto Médio
- Mediatriz
- Retas Perpendiculares e retas concorrentes.
- Ponto de Intersecção
- Distância entre os pontos
- Medidas de comprimento

Discussões sobre processo construido:
- Dependente da posição de cada aldeia o ponto de intersecção (USINA) sempre permanecerá com a mesma distância entre as aldeias. Assimo custo de abastecimento será mínimo para a empresa.

Fonte: registo de F.

Na sequência, é apresentado o terceiro problema, o qual foi resolvido pelos estudantes denotados aqui por B e E.

Problema laranja

Dada uma circunferência e um triângulo ABC, sendo os pontos A e B na circunferência e C centro, encontrar o lugar geométrico do ortocentro quando o ponto B percorre a circunferência.

a- Defina ortocentro de um triângulo.
b- O que é necessário para obter o ortocentro?
c- Quais conceitos geométricos estão envolvidos nessa construção?
d- Em qual ano da Escola Básica a atividade pode ser explorada?
e- E no Ensino Superior?
f- Verifique se o lugar geométrico depende da posição em que se encontra o ortocentro.

A forma de apresentação do problema laranja foi um pouco diferente das anteriores, uma vez que foram feitos alguns questionamentos a respeito deste, o que se fazia necessário para 'compreender o problema' antes de responder ao que o pesquisador solicitava.

O estudante E fez um pequeno esquema do problema, com uma circunferência e um triângulo com os vértices A e B nela e C sendo seu centro, atendendo ao enunciado. Isso reitera o indicado por Polya (2006), segundo o qual, em alguma figura existente ou ao intuir do enunciado, o aluno deverá esboçá-la para explicitar a incógnita.

Os dois atores envolvidos nessa resolução responderam corretamente que o ortocentro de um triângulo corresponde ao ponto de intersecção de suas alturas.

Quanto ao item b, as respostas dos dois divergiram:

B: localizar a altura relativa a cada reta suporte de cada lado do triângulo ABC e observar qual ponto é comum às três alturas.
E: traçar segmento de reta perpendicular a um dos lados e, passando pelo vértice oposto (a altura relativa à reta suporte do lado oposto do triângulo), fazer nos três lados do triângulo. O encontro das alturas é o ortocentro.

Percebemos que a segunda forma não é sintética, ao contrário da primeira, que é bem objetiva. Talvez a primeira tenha sido influenciada, inicialmente, pela figura do triângulo acutângulo construído.

Em se tratando de uma pesquisa em uma disciplina de Geometria, com o objetivo explícito de associar conteúdo, metodologia e voltada ao ensino, o pesquisador desejou, com o terceiro questionamento, verificar se os estudantes, todos professores em ação continuada, indicariam conteúdos envolvidos na resolução dessa atividade, uma vez que existe a concepção de que os conteúdos matemáticos são muito engessados no currículo escolar. Assim, as respostas ao item c foram as que seguem.

B: altura relativa a uma reta suporte de cada lado, reta perpendicular, segmento de reta, ponto de intersecção.
C: perpendicularismo, ortocentro, segmento de reta, altura.

Percebemos que vários outros elementos poderiam, ainda, estarem envolvidos, como o tipo de triângulos, para os quais a forma de obter a altura envolve o lado oposto a um vértice ou à reta suporte desse lado.

Em complementação ao solicitado no item anterior, o pesquisador desejou investigar em quais anos da Escola Básica os investigados acreditavam que essa forma de desenvolver o conteúdo poderia ser utilizada. Responderam que poderia ser no 6º ou no 8º ano, dando visões distintas, talvez pelo fato de B somente atuar no ensino superior, enquanto E atua na formação inicial do professor. Nesse sentido, E ainda explicita: "*normalmente no 8º ano do EF e, quando se trabalha Geometria no EM, no 3º ano*".

Quanto à possibilidade de ser empregada a atividade no Ensino Superior, assim registraram:

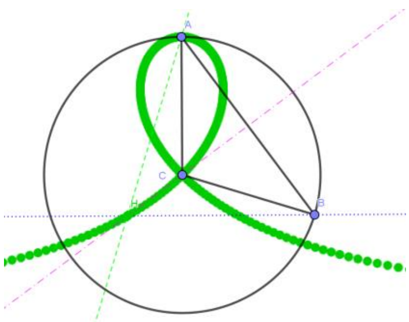
B: em qualquer semestre, mas preferencialmente antes dos Estágios docentes.
E: na disciplina de Geometria Plana.

Por fim, esperávamos que os estudantes utilizassem o Geogebra e os mecanismos dinâmicos para verificarem se o lugar geométrico dependia da posição em que se encontrava o ponto B. A estudante E afirmou que sim, não dando justificativas.

B: "o conjunto de pontos ortocentro definem um lugar geométrico. Mudando o ponto do triângulo, temos diferentes pontos dentro de um único lugar geométrico".

Nenhum dos dois conseguiu definir qual é o lugar geométrico a partir das mudanças do ponto móvel em diferentes posições. Esperávamos que encontrassem o lugar geométrico constante da Figura 11.

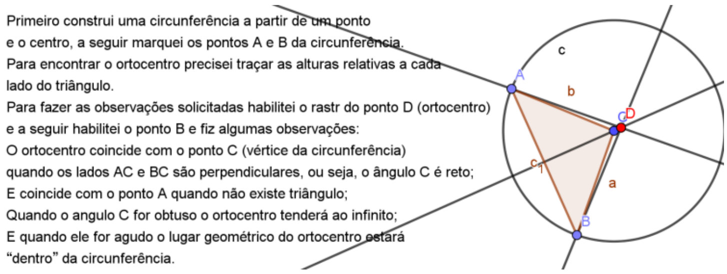
Figura 11 - Leminiscata



Fonte: construção do pesquisador.

Por sua vez, agora, E apresenta as justificativas da construção no software (Figura 12)

Figura 12 – Justificativa dada por E.



Fonte: registro feito por E no Geogebra.

Reunidos, os dois estudantes discutiram suas soluções, buscaram uniformizar os conceitos envolvidos, de modo a explanarem a retrospectiva dos planos elaborados pelos dois, o que foi registrado assim:

B e E: *a dupla realizou a atividade de modo similar e, após as argumentações de ambos, concordou-se que essa atividade pode ser aplicada em qualquer momento, desde que o professor sinta-se preparado para tal, e o aprofundamento dado deverá estar de acordo com o nível intelectual de seus alunos*.

Observarmos, na escrita feita pelo indivíduo E, que há certa inconsistência quando vai expressar o caso em que o ângulo de vértice C é obtuso. Na realidade, talvez, queria expressar que o ortocentro é externo ao triângulo e se afasta da janela de visualização e, por isso, diz tender ao infinito. Não percebeu que ele volta ao estágio inicial da movimentação.

Percebemos, pois, que a atividade despertou a reflexão sobre o ensinar, os conteúdos dos currículos escolares e a forma de abordagem. Além disso, foi possível observar o crescimento dos indivíduos no desenrolar da atividade, o que vai ao encontro do que preconizam Onuchic e Allevato (2006) na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Considerações finais

Apresentamos, no presente artigo, a aplicação de atividades envolvendo a Metodologia de Resolução de Problemas para um grupo de estudantes regularmente matriculados em uma disciplina de Geometria em um programa de Pós-Graduação em ensino. Ao todo, foram três problemas diversos, em que a solução de cada um envolvia propriedades de triângulos na Geometria Euclidiana, sendo que foi distribuído a cada dois alunos um dos três problemas, mediante uma técnica de distribuição por fichas coloridas. Entretanto, eles não sabiam que haveria um segundo colega resolvendo o mesmo problema.

Após a compreensão do problema, delineamento de um plano de execução, busca da respectiva solução, os dois que tinham resolvido a mesma tarefa foram reunidos para analisar o que cada um havia feito e realizar a retrospectiva da solução, conforme indica a metodologia empregada. A partir da conclusão dessa etapa, cada dupla apresentou e defendeu, perante o grande grupo, o seu problema, proporcionando uma discussão geral das soluções.

A atividade fez parte do processo avaliativo da disciplina, o que vai ao encontro da tendência indicada por Onuchic e Allevato (2009) a respeito na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Por outro lado, constatamos que os procedimentos indicados por Hiebert (1996), sobre a visão funcional da metodologia, puderam ser observados e colocados em prática pelos participantes durante realização da atividade em sala de aula, conforme sugere o autor. Isso poderá contribuir para aplicações futuras com seus alunos. Além disso, comprovamos o dito pelo autor, de que a aprendizagem matemática requer justificativas e explicações para as respostas e os métodos. Assim, os estudantes devem compreender que a responsabilidade de determinar se as respostas estão corretas, e por que elas estão corretas, também é deles. Dessa forma, as argumentações das duplas para obtenção do consenso e as justificativas apresentadas ao grande grupo devem ser uma parte integrante de suas soluções, de acordo com o autor.

Acreditamos que o software Geogebra foi facilitador para que a atividade cumprisse os objetivos da disciplina, bem como para o definido na pesquisa constante do artigo.

Referências bibliográficas

BAUER, M.W.; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e so**m: um manual prático. 13. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2015.

GASKELL, G. Entrevistas individuais e grupais. In: BAUER, M.W.; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático**. 13. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2015, pp. 64-89.

ONUCHIC, L.de la R., ALLEVATO, N.S.G. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, n. 55 jul./dez. 2009. pp.1-19.

POLYA, G. **A arte de resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

WALLE, J. A. Van de. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. Ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 2009.